

# Teoria dos grafos

Guilherme Oliveira Mota

CMCC - Universidade Federal do ABC

`g.mota@ufabc.edu.br`

20 de novembro de 2019

Esta versão é um rascunho ainda em elaboração e não foi revisada



---

# Sumário

<b>1</b>	<b>Conceitos essenciais</b>	<b>1</b>
1.1	Adjacências e incidências . . . . .	2
1.2	Subgrafos . . . . .	6
1.3	Passeios, trilhas, caminhos e ciclos . . . . .	7
1.4	Grafos conexos, regulares e completos . . . . .	10
1.4.1	Diâmetro e cintura de grafos . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Grafos bipartidos e grafos sem cliques</b>	<b>15</b>
2.1	Caracterização de grafos bipartidos . . . . .	16
2.2	Grafos livres de ciclos e cliques . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Trilhas Eulerianas</b>	<b>23</b>
<b>4</b>	<b>Árvores</b>	<b>29</b>
4.1	Árvore geradoras . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Digrafos</b>	<b>39</b>
5.1	Vizinhança e subdigrafos . . . . .	40
5.1.1	Ordenação topológica . . . . .	42
5.1.2	Componentes fortemente conexas . . . . .	44
<b>6</b>	<b>Emparelhamentos</b>	<b>47</b>
6.1	Emparelhamentos máximos . . . . .	47
6.2	Teorema de Hall . . . . .	49
<b>7</b>	<b>Conexidade</b>	<b>53</b>
7.1	Relações entre conexidade e aresta-conexidade . . . . .	55

<b>8</b>	<b>Caminhos e ciclos hamiltonianos</b>	<b>59</b>
<b>9</b>	<b>Coloração de vértices</b>	<b>65</b>
9.1	Colorações mínimas de vértices . . . . .	66
<b>10</b>	<b>Coloração de arestas</b>	<b>71</b>
10.1	Colorações mínimas de arestas . . . . .	71
<b>11</b>	<b>Conjuntos independentes e cliques</b>	<b>77</b>
<b>12</b>	<b>Planaridade</b>	<b>79</b>

---

## Conceitos essenciais

Um *grafo*  $G = (V, E)$  é uma estrutura composta por um conjunto de *vértices*  $V$  e um conjunto de *arestas*  $E$  que é formado por pares de vértices. Muitas vezes vamos representar uma aresta  $e = \{u, v\}$  simplesmente como  $uv$ . Dado um grafo  $G$ , denotamos por  $V(G)$  o conjunto de vértices de  $G$  e por  $E(G)$  o conjunto de arestas de  $G$ . Por simplicidade, escrevemos  $v(G)$  e  $e(G)$ , respectivamente, para  $|V(G)|$  e  $|E(G)|$ , i.e.,  $v(G)$  e  $e(G)$  denotam, respectivamente, a quantidade de vértices e arestas do grafo  $G$ . A *ordem* de um grafo  $G$  é a quantidade de vértices de  $G$ . Normalmente representamos um grafo graficamente como um conjunto de pontos (os vértices) e um conjunto de linhas conectando pares de pontos (as arestas). O *complemento* de um grafo  $G = (V, E)$  é o grafo  $\bar{G} = (V, E')$ , onde uma aresta está em  $E'$  se e somente se não está em  $E$ . Veja a Figura 1.1 para exemplos de representação gráfica de grafos.

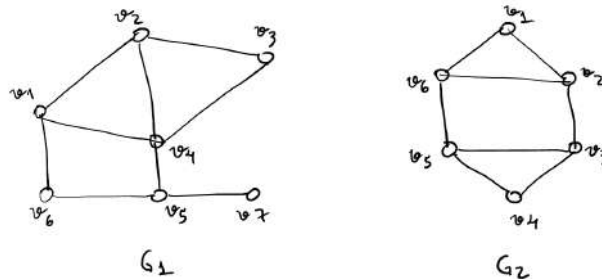


Figura 1.1: Representação gráfica de dois grafos.

## 1.1 Adjacências e incidências

Seja  $e = uv$  uma aresta de um grafo  $G$ . Dizemos que os vértices  $u$  e  $v$  são *vizinhos* e que são vértices *adjacentes*. Assim, o vértice  $u$  é *adjacente* ao vértice  $v$  e vice-versa. Os vértices  $u$  e  $v$  são chamados de *extremos* da aresta  $uv$ . Arestas com um extremo em comum, i.e., arestas com interseção em um vértice, são ditas *adjacentes*. Relacionamos vértices e arestas dizendo que a aresta  $uv$  *incide* em  $u$  e em  $v$ .

Arestas que possuem os mesmos extremos são chamadas de *arestas múltiplas*, e arestas cujos dois extremos são o mesmo vértice, i.e., arestas do tipo  $uu$ , são chamadas de *laço*. *Grafos simples* são grafos que não possuem laços nem arestas múltiplas. A menos que indicado em contrário, os grafos considerados aqui são simples.

O *grau* de um vértice  $v$  de um grafo  $G$ , denotado por  $d_G(v)$ , é a quantidade de vizinhos do vértice  $v$ . Já o conjunto dos vizinhos de  $v$ , a *vizinhança* de  $v$ , é denotado por  $N_G(v)$ . Dado um conjunto  $X \subseteq V(G)$ , definimos a *vizinhança* de  $X$  como  $N_G(X) = \bigcup_{x \in X} N_G(x)$ . Quando estiver claro a que grafos estamos nos referindo, utilizamos simplesmente as notações  $d(v)$  e  $N(v)$ , e fazemos o mesmo com todas as notações em que  $G$  está subscrito. Um vértice sem vizinhos, isto é, de grau 0, é chamado de *vértice isolado*. O *grau mínimo* de um grafo  $G$ , denotado por  $\delta(G)$ , é o menor grau dentre todos os vértices de  $G$ , i.e.,

$$\delta(G) = \min\{d(v) : v \in V(G)\}.$$

O *grau máximo* de  $G$ , denotado por  $\Delta(G)$ , é o maior grau dentre todos os vértices de  $G$ , i.e.,

$$\Delta(G) = \max\{d(v) : v \in V(G)\}.$$

Por fim, o grau médio de  $G$ , denotado por  $\bar{d}(G)$ , é a média de todos os graus de  $G$ , i.e.,

$$\bar{d}(G) = \frac{\sum_{v \in V(G)} d(v)}{v(G)}.$$

Na Figura 1.2 temos um grafo exemplificando os conceitos de graus mínimo, máximo e médio.

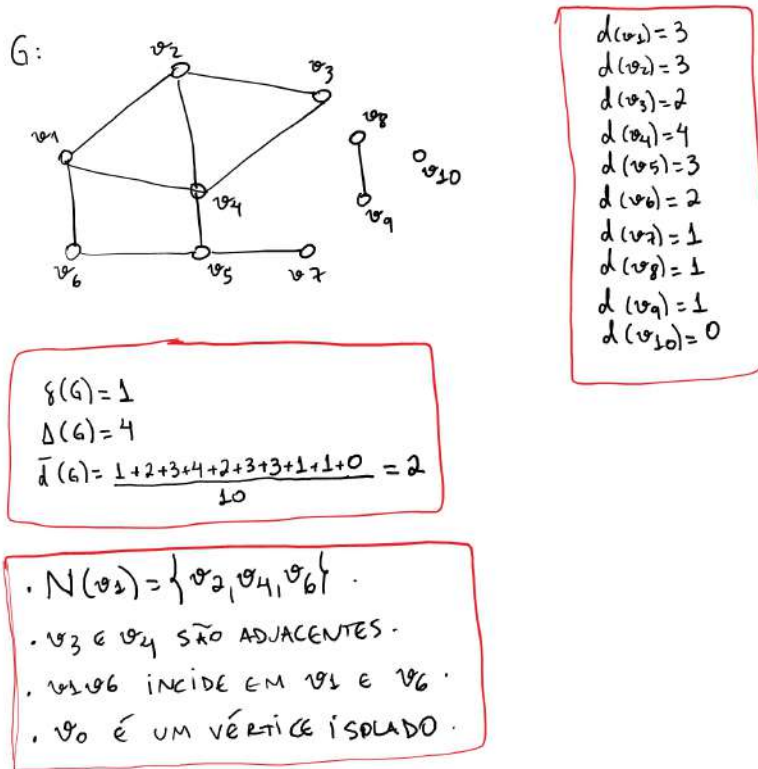


Figura 1.2: Grafo  $G$  onde são indicados os graus dos vértices e os graus mínimo, máximo e médio de  $G$ . Além disso, exemplificamos os conceitos de vizinhança, adjacência e incidência.

Apresentamos agora uma proposição simples, mas muito importante, que relaciona a soma dos graus de um grafo  $G$  à quantidade de arestas de  $G$ .

### Proposição 1.1

Dado um grafo  $G$ , temos que

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2e(G).$$

*Demonstração 1 (Indução na quantidade de vértices) - Proposição 1.1.* Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices. Vamos provar a proposição por indução na quantidade de vértices de  $G$ . Para a base, note que quando  $G$  possui somente um vértice, o grafo não tem

arestas, de modo que o resultado é válido. Suponha que para qualquer grafo  $G'$  com menos que  $n$  vértices temos  $\sum_{v \in V(G')} d_{G'}(v) = 2e(G')$ .

Remova um vértice  $w$  de  $G$  obtendo um grafo  $G'$  com  $n - 1$  vértices. Note que, como  $G'$  contém os mesmos vértices de  $G$  com exceção do vértice  $w$ , temos que

$$\sum_{v \in V(G')} d_G(v) = d_G(w) + \sum_{v \in V(G')} d_{G'}(v). \quad (1.1)$$

A validade da igualdade acima segue do fato de existirem  $d_G(w)$  vizinhos de  $w$  em  $G'$ .

Por hipótese de indução, sabemos que  $\sum_{v \in V(G')} d_{G'}(v) = 2e(G')$ . Utilizando esse fato juntamente com (1.1), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V(G)} d_G(v) &= d_G(w) + \sum_{v \in V(G')} d_G(v) \\ &= d_G(w) + \left( d_G(w) + \sum_{v \in V(G')} d_{G'}(v) \right) \\ &= 2d_G(w) + 2e(G') \\ &= 2e(G), \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do fato de  $e(G) = e(G') + d_G(w)$ . □

Muitas vezes existem diversas demonstrações para um mesmo resultado. A seguir apresentamos uma segunda demonstração, também por indução, mas dessa vez na quantidade de arestas do grafo.

*Demonstração 2 (Indução na quantidade de arestas) - Proposição 1.1.* Vamos provar a proposição por indução na quantidade de arestas do grafo  $G$ . Para a base, note que quando  $G$  não tem arestas o resultado é válido. Suponha que para qualquer grafo  $G'$  com menos que  $e(G)$  arestas temos  $\sum_{v \in V(G')} d_{G'}(v) = 2e(G')$ .

Remova uma aresta  $uv$  de  $G$  obtendo um grafo  $G'$  com  $e(G') = e(G) - 1$  arestas. Note que, como  $G'$  contém os mesmos vértices de  $G$  e exatamente uma aresta a menos, temos que

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2 + \sum_{v \in V(G')} d_{G'}(v). \quad (1.2)$$



Pela hipótese de indução, concluímos que

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2 + 2e(G') = 2(e(G') + 1) = 2e(G). \quad (1.3)$$

□

Abaixo apresentamos uma prova ainda mais simples para a Proposição 1.1, baseada em uma observação sobre a relação entre a soma dos graus e a quantidade de arestas de um grafo.

*Demonstração 3 - Proposição 1.1.* Como cada aresta é um conjunto de dois vértices, ao somar os graus de  $G$  cada aresta é contada duas vezes nessa soma. Por exemplo, ao somar todos os graus, uma aresta  $uv$  é contada uma vez ao somar o grau de  $u$  e outra vez ao somar o grau de  $v$ . Assim, temos que  $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2e(G)$ . □

Temos o seguinte corolário da Proposição 1.1.

### Corolário 1.2

Todo grafo tem uma quantidade par de vértices de grau ímpar.

*Demonstração.* Suponha por contradição que existe uma quantidade ímpar de vértices de grau ímpar. Notando que a soma de uma quantidade ímpar de números ímpares é sempre igual a um número ímpar, temos

$$\sum_{v \in V(G), d(v) \text{ é ímpar}} d(v) = 2k + 1 \quad (1.4)$$

para algum inteiro  $k$  não negativo. Mas a soma de uma quantidade par de números pares é sempre um número par. Assim, temos

$$\sum_{v \in V(G), d(v) \text{ é par}} d(v) = 2\ell \quad (1.5)$$

para algum inteiro  $\ell$  não negativo. Utilizando a Proposição 1.1 e combinando (1.4)

e (1.5) temos o seguinte:

$$\begin{aligned} 2e(G) &= \sum_{v \in V(G)} d(v) \\ &= \sum_{v \in V(G), d(v) \text{ é ímpar}} d(v) + \sum_{v \in V(G), d(v) \text{ é par}} d(v) \\ &= (2k + 1) + 2\ell \\ &= 2(k + \ell) + 1. \end{aligned}$$

Portanto, como  $2e(G)$  é par e  $2(k + \ell) + 1$  é ímpar, temos uma contradição.  $\square$

Um outro resultado sobre os graus dos vértices de um grafo é apresentado a seguir.

### Proposição 1.3

Todo grafo  $G$  com  $v(G) \geq 2$  contém dois vértices com mesmo grau.

*Demonstração.* Seja  $n$  a quantidade de vértices de  $G$ . Suponha por contradição que todos os graus de vértices de  $G$  são diferentes entre si. Assim, a única possibilidade é que os graus sejam, exatamente,  $0, 1, \dots, n - 1$ , que são todos os graus possíveis. Porém, como existe vértice  $v$  com grau  $n - 1$ , sabemos que  $v$  é adjacente a todos os outros vértices de  $G$ , uma contradição com o fato de existir um vértice de grau 0 em  $G$ .  $\square$

## 1.2 Subgrafos

Um grafo  $H$  é *subgrafo* de um grafo  $G$  se  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $E(H) \subseteq E(G)$ . Dizemos também que  $G$  *contém*  $H$ , e escrevemos  $H \subseteq G$  para denotar essa relação. Um *subgrafo próprio*  $H$  de  $G$  é um subgrafo de  $G$  tal que  $V(H) \neq V(G)$  ou  $E(H) \neq E(G)$ .

Um subgrafo  $H$  de um grafo  $G$  é *gerador* se  $V(H) = V(G)$ . Dado um conjunto de vértices  $X \subseteq V(G)$  de um grafo  $G$ , o subgrafo de  $G$  *induzido por*  $X$ , denotado por  $G[X]$ , é o subgrafo  $H$  de  $G$  tal que  $V(H) = X$  e  $E(H)$  é o conjunto de arestas de  $G$  com os dois extremos em  $X$ , i.e.,  $E(H) = \{uv : uv \in E(G) \text{ e } u, v \in X\}$ . Similarmente, se  $F$  é um subconjunto de arestas de  $G$ , então o subgrafo de  $G$  *induzido por*  $F$ , denotado por  $G[F]$ , é o subgrafo  $H$  de  $G$  tal que  $E(H) = F$  e  $V(H)$  é o conjunto de vértices de  $G$  que são extremos de alguma aresta de  $F$ , i.e.,  $V(H) = \{v : \text{existe } u \text{ com } uv \in F\}$ .

Quando conveniente, denotamos por  $G - X$  e  $G - F$ , respectivamente, os grafos obtidos de  $G$  pela remoção de  $X$  e  $F$ , i.e.,  $G - X = G[V \setminus X]$  e  $G - F = G[E \setminus F]$ . Ademais, dado um grafo  $G = (V, E)$  e um conjunto de vértices  $X'$  que não está em  $V$  e um conjunto de arestas  $F'$  que não está em  $E$  (mas é formado por pares de vértices de  $G$ ), denotamos por  $G + X'$  e  $G + F'$ , respectivamente, os grafos obtidos de  $G$  pela adição de  $X'$  e  $F'$ , i.e.,  $G + X' = (V \cup X', E)$  e  $G + F' = (V, E \cup F')$ .

Na Figura 1.3 temos exemplos de subgrafos induzidos, próprios e geradores.

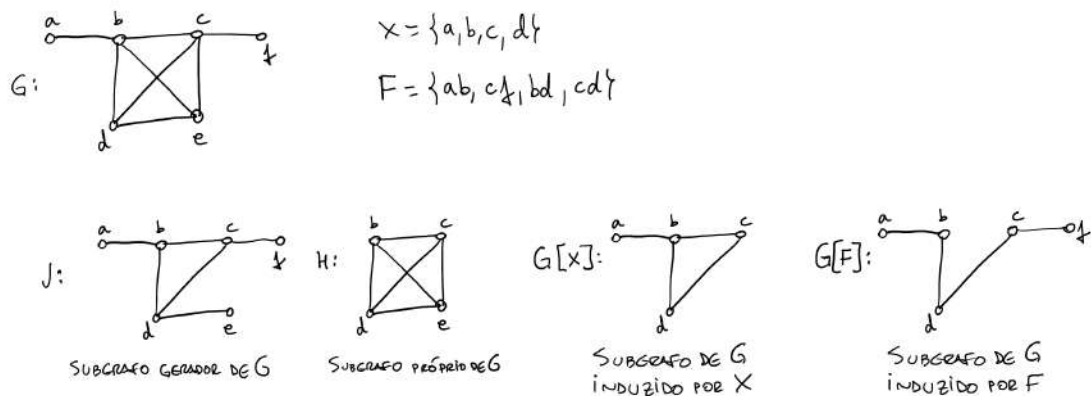


Figura 1.3: Subgrafos induzidos, próprios e geradores.

### 1.3 Passeios, trilhas, caminhos e ciclos

Um *caminho* é um grafo  $P = (V_P, E_P)$  onde  $V_P = \{v_1, \dots, v_k\}$  é um conjunto de vértices distintos e  $E_P = \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq k - 1\}$ . Muitas vezes representamos um caminho pela sequência de vértices  $v_1, \dots, v_k$ , onde vamos escrever simplesmente  $P = v_1, \dots, v_k$  para representar o caminho  $P$ . O grafo  $P + \{v_1 v_k\}$ , obtido de um caminho  $P = (V_P, E_P)$  com  $V_P = \{v_1, \dots, v_k\}$  e a aresta  $v_1 v_k$  é chamado de *ciclo*. Um ciclo de comprimento  $n$  é denotado por  $C_n$ . Quando conveniente denotaremos um ciclo  $C_n$  por sua sequência natural de vértices  $v_1, \dots, v_n, v_1$ . Um ciclo é *par* se possui uma quantidade par de vértices, e é *ímpar* se possui uma quantidade ímpar de vértices.

Dado um grafo  $G$ , uma *trilha* de  $G$  é uma sequência de vértices  $v_1, \dots, v_k$  tal que  $v_i v_{i+1} \in E(G)$  para todo  $1 \leq i \leq k - 1$  e todas essas arestas são distintas (pode haver repetição de vértices). Um *passeio* de  $G$  é uma sequência de vértices  $v_1, \dots, v_k$  tal que

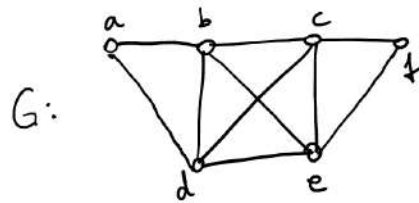
$v_i v_{i+1} \in E(G)$  para todo  $1 \leq i \leq k-1$ , onde pode haver repetição de vértices e arestas. Dizemos que as arestas  $v_i v_{i+1} \in E(G)$  para todo  $1 \leq i \leq k-1$  são as arestas do passeio. Dado um passeio (trilha)  $P$ , algumas vezes vamos utilizar o termo ‘passeio’ (‘trilha’) também para nos referir ao grafo induzido pelos vértices e arestas de  $P$ . Assim, vamos utilizar a notação  $V(P)$  e  $E(P)$ , respectivamente, para nos referir aos conjuntos de vértices e arestas do grafo induzido pelos vértices e arestas de  $P$ .

Com essas definições de caminhos, ciclos, trilhas e passeios, é fácil perceber que uma trilha é um passeio em que não há repetição de arestas. Ademais, caminhos (vistos como uma sequência de vértices) são trilhas em que não há repetição de vértices.

Dado um passeio  $P = v_1, \dots, v_k$ , dizemos que  $P$  é um passeio de  $v_1$  a  $v_k$ . Ademais, dizemos que  $P$  *passa* pelos vértices  $v_1, \dots, v_k$  e *passa* pelas arestas do passeio. Os vértices  $v_1$  e  $v_k$  são, respectivamente, chamados de *origem* e *término* de  $P$ , os *extremos* de  $P$ . Os vértices  $v_2, \dots, v_{k-1}$  são chamados de vértices *internos* do passeio  $P$ . Por fim, o *comprimento* de um passeio  $P$  é a quantidade de arestas de  $P$ .

Um passeio é dito *fechado* se tem comprimento não nulo e um mesmo vértice é a origem e o término. Um passeio que não é fechado é dito *aberto*. Note que uma sequência de vértices de um ciclo é uma trilha fechada cuja origem e vértices internos são todos distintos.

A Figura 1.4 contém exemplos de caminhos, ciclos, trilhas e passeios de um dado grafo  $G$ .



PASSEIO ABERTO:  $a, b, c, d, b, c, e, d, b, c, f$  (NÃO É TRILHA, NEM CAMINHO)

PASSEIO FECHADO:  $a, b, c, d, b, c, e, d, b, a$  (NÃO É TRILHA, NEM CAMINHO)

TRILHA ABERTA:  $a, b, c, d, b, e, c, f$  (NÃO É CAMINHO)

TRILHA FECHADA:  $a, b, c, d, e, b, d, a$  (NÃO É CAMINHO)

CAMINHO:  $a, b, e, f$  →

CICLO:  $b, c, e, d, b$  →

Figura 1.4: Um grafo  $G$  com exemplos de caminhos, ciclos, trilhas e passeios em  $G$ .

Um conceito importante é o de *distância* entre um par de vértices  $u, v$  de um grafo  $G$ . Denotamos a distância entre  $u$  e  $v$  por  $\text{dist}_G(u, v)$  e a definimos como a quantidade de arestas no menor caminho de  $G$  entre  $u$  e  $v$ . Se não existe caminho entre  $u$  e  $v$ , então convencionamos que  $d_G(u, v) = \infty$  e  $d_G(u, u) = 0$ . Como exemplo, veja que na Figura 1.4, temos  $\text{dist}_G(a, c) = 2$  e  $\text{dist}_G(a, f) = 3$ .

O seguinte resultado garante que o grau mínimo de um grafo garante a existência de caminhos e ciclos com um certo comprimento.

#### Teorema 1.4

Se  $G$  é um grafo com  $\delta(G) \geq 2$ , então  $G$  contém um caminho de comprimento pelo menos  $\delta(G)$  e um ciclo de comprimento pelo menos  $\delta(G) + 1$ .

*Demonstração.* Vamos provar o teorema utilizando uma técnica simples, mas impor-

tante. Seja  $P = v_0, v_1, \dots, v_k$  um caminho mais longo em  $G$  (note que como  $\delta(G) \geq 2$ , esse caminho tem pelo menos duas arestas). Como  $P$  é o caminho mais longo, todos os vizinhos de  $v_k$  estão em  $P$ , pois caso contrário teríamos um caminho mais longo que  $P$ . Isso juntamente com o fato de que  $d(v) \geq \delta(G)$  implica que

$$k \geq \delta(G).$$

Portanto,  $P$  possui comprimento pelo menos  $\delta(G)$ .

Seja  $i$  o menor índice tal que  $v_i v_k \in E(G)$ . Como  $d(v) \geq \delta(G)$ , concluímos que  $C = v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, v_i$  é um ciclo com pelo menos  $\delta(G) + 1$  arestas.  $\square$

## 1.4 Grafos conexos, regulares e completos

Um grafo (ou subgrafo)  $G$  é dito *aresta-maximal* com respeito a uma propriedade  $\mathcal{P}$  (por exemplo, uma propriedade de um grafo  $G$  pode ser  $G$  ser livre de triângulos ou  $G$  ter no máximo  $k$  arestas) se  $G$  possui a propriedade  $\mathcal{P}$  mas o grafo obtido da adição de qualquer aresta a  $G$  não possui a propriedade  $\mathcal{P}$ . Muitas vezes, utilizamos somente o termo *maximal* para nos referir a um grafo  $G$  que tem uma propriedade  $\mathcal{P}$  mas nenhum grafo que contém  $G$  (mas não é o próprio  $G$ ) tem a propriedade  $\mathcal{P}$ .

Um grafo  $G$  é *conexo* se para todo par de vértices  $u, v$  de  $G$  existe um caminho entre  $u$  e  $v$ . Um grafo que não é conexo é dito *desconexo*. Dado um grafo  $G$ , uma *componente* de  $G$  é um subgrafo induzido por um conjunto de vértices  $X$  que é conexo e não existe arestas entre  $X$  e  $V(G) \setminus X$ . Em outras palavras, os subgrafos conexos de um grafo  $G$  que são maximais com respeito à conexidade são chamados de *componentes*. A quantidade de componentes de um grafo  $G$  é denotada por  $c(G)$ .

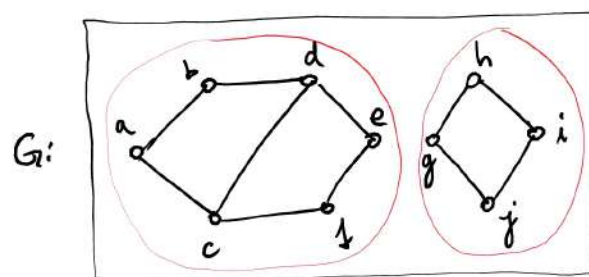
Um grafo em que todos os vértices possuem o mesmo grau  $k$  é dito *grafo  $k$ -regular*. Ademais, um grafo é tido *regular* se é um grafo  $k$ -regular para algum inteiro positivo  $k$ . Um grafo com  $n$  vértices em que existe uma aresta entre todos os pares de vértices é chamado de *grafo completo* e denotado por  $K_n$ . Dado um grafo, um subconjunto de vértices  $X$  onde todos os pares de vértices em  $X$  são adjacentes é chamado de *clique*. Assim, note que o conjunto de vértices de um grafo completo é uma clique. Um grafo completo com 3 vértices é chamado de *triângulo*. Note que o grafo completo  $K_n$  é  $(n - 1)$ -regular e possui  $\binom{n}{2}$  arestas, que é a quantidade total de pares de vértices.

Um grafo que não contém nenhuma aresta é chamado de *grafo vazio*. Dado um grafo  $G = (V, E)$ , um conjunto  $U \subseteq V$  é chamado de *conjunto independente* de  $G$  se não existe nenhuma aresta entre pares de vértices de  $U$  (para mais detalhes sobre conjuntos independentes, veja o Capítulo 11). Assim, um grafo  $G = (V, E)$  é vazio quando o conjunto  $V$  de seus vértices é independente e em um grafo completo o maior conjunto independente contém somente um vértice.

### 1.4.1 Diâmetro e cintura de grafos

O *diâmetro* de  $G$ , denotado por  $\text{diam}(G)$ , é a maior das distâncias entre todos os pares de vértices de  $G$ , i.e.,  $\text{diam}(G) = \max\{\text{dist}_G(u, v) : u, v \in V(G)\}$ . Outro conceito importante é o de *cintura* de um grafo  $G$ , denotado por  $g(G)$ , que é a quantidade de arestas do menor ciclo de  $G$ . Se  $G$  não tem ciclos, então definimos  $g(G) = \infty$ .

Na Figura 1.5 temos um grafo desconexo  $G$  que possui 2 componentes. Note que como  $G$  não tem triângulos e tem um  $C_4$  como subgrafo, possui cintura 4. Ademais, é fácil ver que  $G$  possui diâmetro 3 (veja, por exemplo, a distância entre os vértices  $a$  e  $e$ ).



- $g(G) = 4$
- $G$  TEM 2 COMPONENTES
- $\text{diam}(G) = 3$

Figura 1.5: Um grafo desconexo com 2 componentes.

O seguinte teorema relaciona a cintura e o diâmetro de um grafo.

**Teorema 1.5**

Se  $G$  é um grafo que contém um ciclo, então  $\text{diam}(G) \geq \lfloor g(G)/2 \rfloor$ .

*Demonstração.* Por simplicidade, faça  $k = g(G)$  e seja  $C = v_1, \dots, v_k, v_1$  o menor ciclo de  $G$ . Claramente,  $P = v_1, \dots, v_{\lfloor k/2 \rfloor}$  é um caminho com  $\lfloor k/2 \rfloor$  arestas entre  $v_1$  e  $v_{\lfloor k/2 \rfloor}$ . Note que não existem caminhos com menos que  $\lfloor k/2 \rfloor$  arestas entre  $v_1$  e  $v_{\lfloor k/2 \rfloor}$ . De fato, se  $Q$  é tal caminho, então  $P$  e  $Q$  contém um ciclo com menos de  $k = g(G)$  arestas, uma contradição. Assim, pela definição de diâmetro, temos que

$$\text{diam}(G) = \max\{\text{dist}_G(u, v) : u, v \in V(G)\} \geq \text{dist}_G(v_1, v_{\lfloor k/2 \rfloor}) = \lfloor k/2 \rfloor.$$

□

O teorema a seguir garante que um grafo  $k$ -regular sem triângulos contém pelo menos  $2k$  vértices.

**Teorema 1.6**

Se  $G$  é um grafo  $k$ -regular com  $g(G) \geq 4$ , então  $G$  tem pelo menos  $2k$  vértices.

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo  $k$ -regular com  $g(G) \geq 4$ . Considere um vértice  $v$  qualquer de  $G$  e note que, como  $G$  é  $k$ -regular,  $N(v)$  possui  $k$  vértices. Como  $G$  não tem triângulos, então não existem arestas no grafo induzido por  $N(v)$ , de modo que qualquer vértice  $w$  de  $N(v)$  possui como vizinhos o vértice  $v$  e outros  $k - 1$  vizinhos fora de  $N(v)$ . Assim,  $v(G) \geq 1 + |N(v)| + (|N(v)| - 1) = 2k$ . □

Voltando nossa atenção para a conectividade dos grafos, uma aresta  $e$  de um grafo  $G$  é uma *aresta de corte* se sua remoção de  $G$  gera um grafo  $G'$  com mais componentes conexas que  $G$ . Similarmente, um vértice  $v$  de  $G$  é um *vértice de corte* se sua remoção de  $G$  gera um grafo  $G'$  com mais componentes conexas que  $G$ . Note que no grafo  $G'$  obtido da remoção de uma aresta de corte  $xy$  de um grafo  $G$ , não existe nenhum caminho entre  $x$  e  $y$ , pois eles estão em componentes diferentes de  $G'$ .



**Teorema 1.7**

Sejam  $G$  um grafo e  $e$  uma aresta de  $G$ . A aresta  $e$  é uma aresta de corte de  $G$  se e somente se  $e$  não pertence a nenhum ciclo.

*Demonstração.* Sejam  $G$  um grafo e  $e = xy$  uma aresta de  $G$ . Seja  $xy$  uma aresta de corte de  $G$  e suponha por contradição que  $xy$  pertence a um ciclo  $C = x, v_1, \dots, v_p, y, x$ . Removendo  $xy$ , obtemos um grafo  $G'$  onde  $x$  e  $y$  estão em diferentes componentes. Mas  $G'$  contém o caminho  $x, v_1, \dots, v_p, y$  entre  $x$  e  $y$ , uma contradição.

Agora suponha por contradição que  $xy$  não pertence a nenhum ciclo e  $xy$  não é uma aresta de corte de  $G$ . Como  $xy$  não é uma aresta de corte, sua remoção gera um grafo  $G'$  que contém um caminho  $P$  entre  $x$  e  $y$ . Mas em  $G$ , o caminho  $P$  juntamente com a aresta  $xy$  forma um ciclo, que é uma contradição.  $\square$

---

## Grafos bipartidos e grafos sem cliques

Um grafo  $G = (V, E)$  é *bipartido* se  $V$  pode ser particionado em dois conjuntos  $X$  e  $Y$  (em uma partição de  $V$  temos  $X \cap Y = \emptyset$  e  $X \cup Y = V$ ) de modo que toda aresta de  $G$  tem um extremo em  $X$  e outro em  $Y$ , i.e.,  $X$  e  $Y$  são conjuntos independentes. Dizemos que uma partição com essa propriedade é uma *bipartição* do grafo  $G$  e escrevemos  $G = (X, Y; E)$  para indicar que  $\{X, Y\}$  é uma bipartição de  $G$ . Um grafo  $G = (X, Y; E)$  é *bipartido completo* se existe uma aresta entre qualquer par de vértices  $\{x, y\}$  onde  $x \in X$  e  $y \in Y$ . Denotamos por  $K_{x,y}$  um grafo bipartido completo com  $x$  vértices em um lado da partição e  $y$  vértices do outro lado da partição. Em particular, chamamos o grafo  $K_{1,2}$  de *cereja* e o grafo  $K_{1,3}$  de *garra*.

Na Figura 2.1 temos exemplos de grafos regulares, bipartidos e completos.

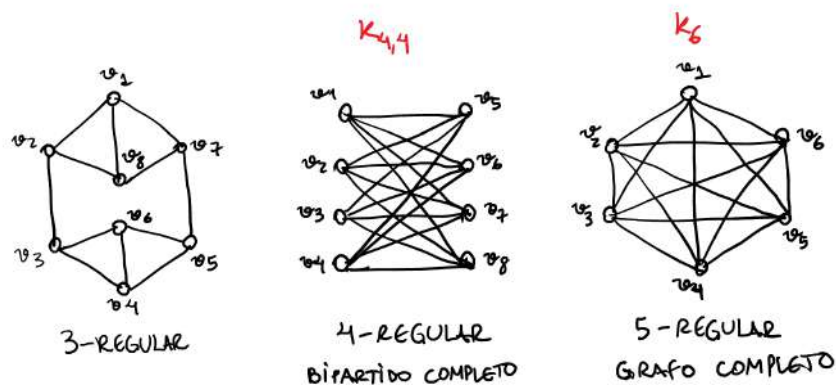


Figura 2.1: Exemplos de grafos regulares, bipartidos e completos.

Para mais exemplos de grafos bipartidos, com conjuntos independentes indicados nas imagens, veja a Figura 2.2.

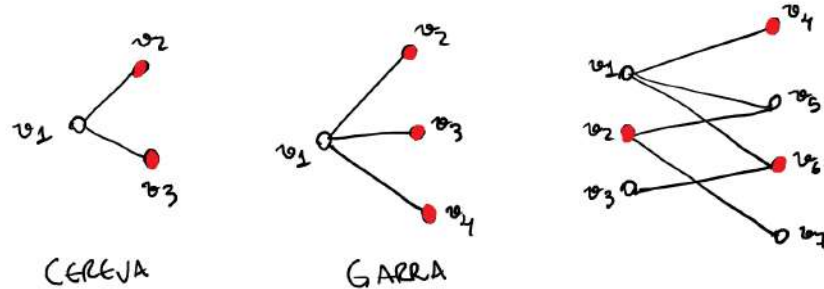


Figura 2.2: Exemplos de grafos bipartidos. Os conjuntos dos vértices ressaltados em cada grafo são conjuntos independentes.

## 2.1 Caracterização de grafos bipartidos

O seguinte resultado fornece uma caracterização para grafos bipartidos.

### Teorema 2.1

Um grafo  $G$  é bipartido se e somente se  $G$  não contém ciclos ímpares.

*Demonstração.* Começemos provando que se  $G = (X, Y; E)$  é um grafo bipartido, então  $G$  não contém ciclos ímpares. Vamos mostrar que todo ciclo de  $G$  possui uma quantidade par de vértices (note que caso  $G$  não tenha ciclos, não há o que provar). Seja  $C_k$  um ciclo de  $G$  que possui  $k$  vértices e tem sequência de vértices  $v_1, \dots, v_k$ . Sem perda de generalidade, assuma que  $v_1 \in X$ . Vamos mostrar que para todo  $i$  ímpar com  $1 \leq i \leq k$ , temos que  $v_i$  está em  $X$ . De fato, uma simples indução prova esse fato: sabemos que  $v_1 \in X$ . Considere  $i \geq 3$  ímpar e suponha que  $v_{i-2} \in X$ . Como  $v_{i-2}v_{i-1} \in E$  e  $G$  é bipartido, sabemos que  $v_{i-1} \in Y$ . Da mesma forma,  $v_{i-1}v_i \in E$  implica que  $v_i$  está em  $X$ . Por fim, como existe uma aresta entre  $v_k$  e  $v_1$ , certamente  $v_k$  está em  $Y$  (pois  $G$  é bipartido e  $v_1 \in X$ ). Mas como já sabemos que todo  $v_i$  com  $i$  ímpar está em  $X$ , de  $v_k \in Y$  concluímos que  $k$  é par. Portanto, acabamos de mostrar que todo ciclo  $C_k$  em  $G$  tem uma quantidade par de vértices.

Resta mostrar que se  $G$  não contém ciclos ímpares, então  $G$  é bipartido. Seja  $G$  um grafo sem ciclos ímpares e assumamos, sem perda de generalidade, que  $G$  é conexo. Seja  $x$  um vértice qualquer de  $G$  e defina  $X$  e  $Y$ , respectivamente, como os conjuntos de vértices de  $G$  à distância par e ímpar de  $x$ . Vamos mostrar que  $(X, Y)$  é uma bipartição de  $G$ . Para isso, inicialmente nosso objetivo é provar que quaisquer dois vértices  $u$  e  $v$  em  $X$  não são adjacentes. Considere um caminho mais curto

$$P_{x,u} = x, v_1, v_2, \dots, v_p, u$$

entre  $x$  e  $u$  e um caminho mais curto

$$Q_{x,v} = x, w_1, w_2, \dots, w_q, v$$

entre  $x$  e  $v$ .

Como  $x$  é um vértice que está em ambos os caminhos  $P_{x,u}$  e  $Q_{x,v}$ , existe pelo menos um vértice em comum nesses caminhos. Seja  $v_i$  o vértice que está em  $V(P_{x,u})$  e  $V(Q_{x,v})$  tal que nenhum vértice em  $\{v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_p\}$  pertence a  $V(Q_{x,v})$ . Como  $P_{x,u}$  e  $Q_{x,v}$  são, respectivamente, caminhos mais curtos entre  $x$  e  $u$  e entre  $x$  e  $v$ , o trecho do caminho  $P_{x,u}$  de  $x$  a  $v_i$  tem a mesma quantidade de arestas do trecho do caminho  $Q_{x,v}$  de  $x$  a  $v_i$ . Assim, claramente

$$P_{x,v_i} = x, v_1, \dots, v_i \text{ e } Q_{x,w_i} = x, w_1, \dots, w_i \text{ têm a mesma quantidade de arestas,} \quad (2.1)$$

onde  $v_i = w_i$ . Como  $u$  e  $v$  estão em  $X$ , temos que

$$P_{x,u} \text{ e } Q_{x,v} \text{ têm quantidade par de arestas cada um.} \quad (2.2)$$

Sejam  $P_{v_i,u} = v_i, \dots, v_p, u$  e  $Q_{w_i,v} = w_i, \dots, w_q, v$ . Por (2.1) e (2.2), temos que

$$e(P_{v_i,u}) \text{ e } e(Q_{w_i,v}) \text{ têm a mesma paridade.}$$

Portanto, o caminho  $P = u, v_p, v_{p-1}, \dots, v_i, w_{i+1}, w_{i+2}, \dots, w_q, v$  é um caminho entre  $u$  e  $v$  com uma quantidade par de arestas. Caso  $uv \in E(G)$ , adicionando a aresta  $uv$  ao caminho  $P$  teríamos um ciclo ímpar. Porém, como  $G$  não tem ciclos ímpares, não existe

aresta entre  $u$  e  $v$ . Como escolhemos  $u$  e  $v$  arbitrariamente em  $X$ , concluímos que não existe aresta entre vértices de  $X$  (note que não há arestas entre  $x$  e outros vértices de  $X$ ). De forma análoga, podemos mostrar que não existe aresta entre vértices de  $Y$ , concluindo a prova do teorema.  $\square$

O seguinte simples resultado afirma que qualquer bipartição de grafos bipartidos regulares é balanceada.

### **Teorema 2.2**

Para todo grafo bipartido regular  $G$  e toda bipartição  $(X, Y)$  de  $G$  temos  $|X| = |Y|$ .

*Demonstração.* Suponha por contradição que  $G$  seja um grafo bipartido  $k$ -regular e que existe uma bipartição  $(X, Y)$  com  $|X| < |Y|$ . Como  $G$  é bipartido, temos que  $e(G) = \sum_{v \in X} d(v)$  e que  $e(G) = \sum_{v \in Y} d(v)$ . Assim, temos que

$$k|X| = \sum_{v \in X} d(v) = e(G) = \sum_{v \in Y} d(v) = k|Y| > k|X|,$$

uma contradição.  $\square$

## **2.2 Grafos livres de ciclos e cliques**

Nesta seção apresentamos resultados que estimam a quantidade máxima de arestas possível em um grafo que não contém subgrafos completos de um dado tamanho. A seguinte proposição garante que grafos bipartidos não podem ter “muitas” arestas<sup>1</sup>.

### **Proposição 2.3**

Se  $G$  é um grafo bipartido com  $n$  vértices, então  $G$  tem no máximo  $n^2/4$  arestas.

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo bipartido com  $n$  vértices e suponha por contradição que  $G$  tem mais que  $n^2/4$  arestas. Seja  $(X, Y)$  uma bipartição de  $G$  com  $|X| = x$  e

<sup>1</sup>Para manter a simplicidade, em diversos pontos vamos ignorar pisos e tetos. Por exemplo, a quantidade precisa de arestas na conclusão da Proposição 2.3 é  $\lfloor n/2 \rfloor \lfloor n/2 \rfloor$ .

$|Y| = y$ . Como  $G$  é bipartido, temos que

$$e(G) \leq xy. \quad (2.3)$$

Por outro lado, utilizando a suposição inicial sobre a quantidade de arestas de  $G$  e o fato  $n = x + y$ , temos

$$e(G) > \frac{n^2}{4} = \frac{(x + y)^2}{4}. \quad (2.4)$$

Combinando (2.3) e (2.4) temos

$$x^2 + 2xy + y^2 < 4xy.$$

Mas essa desigualdade implica que  $x^2 - 2xy + y^2 < 0$ , que é o mesmo que  $(x - y)^2 < 0$ , uma contradição, uma vez que  $(x - y)^2 \geq 0$ .  $\square$

Ao nos depararmos com um resultado como o da Proposição 2.3 devemos sempre nos perguntar se esse resultado é o melhor possível. Por exemplo, o seguinte resultado é verdadeiro: Se  $G$  é um grafo bipartido com  $n$  vértices, então  $G$  tem no máximo  $\binom{n}{2}$  arestas. Porém, ele é óbvio, dado que qualquer grafo com  $n$  vértices possui no máximo  $\binom{n}{2}$  arestas. Assim, faz sentido nos perguntarmos se é possível provar um resultado que afirme que todo grafo bipartido tem no máximo  $x$  arestas, para um valor de  $x$  menor que  $n^2/4$  como enunciado na Proposição 2.3. A resposta para essa pergunta é negativa, pois existe um grafo bipartido que possui exatamente  $n^2/4$  arestas, a saber, o grafo bipartido  $K_{n/2, n/2}$ , i.e., o grafo bipartido completo com  $n/2$  vértices em cada parte da bipartição.

A Proposição 2.3 apresenta um limitante superior para a quantidade de arestas de grafos bipartidos. Com a caracterização de grafos bipartidos do Teorema 2.1, podemos enunciar a Proposição 2.3 da como abaixo.

#### **Proposição 2.4**

Se  $G$  é um grafo com  $n$  vértices sem ciclos ímpares, então  $G$  tem no máximo  $n^2/4$  arestas.

Já sabemos que não é possível melhorar (diminuir) a quantidade  $n^2/4$  na Pro-

posição 2.4, pois existe um grafo bipartido com  $n$  vértices e exatamente  $n^2/4$  arestas (o grafo bipartido completo balanceado). Podemos também questionar se é possível enfraquecer a hipótese da proposição e ainda assim ter o mesmo limitante para a quantidade de arestas do grafo  $G$ , i.e., se é possível enfraquecer a proibição de todos os ciclos ímpares de  $G$ . De fato, o seguinte resultado clássico mostra que basta proibir triângulos para se obter a mesma conclusão.

**Teorema 2.5: Teorema de Mantel, 1907**

Se  $G$  é um grafo com  $n$  vértices sem triângulos, então  $G$  tem no máximo  $n^2/4$  arestas.

*Demonstração 1 (Indução) - Teorema de Mantel.* Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices sem triângulos. Se  $n \leq 2$ , então o teorema vale trivialmente. Assuma  $n \geq 3$  e suponha que a conclusão é verdadeira para todo grafo com menos que  $n$  vértices que não contém triângulos.

Seja  $H$  o grafo obtido de  $G$  após a remoção de dois vértices adjacentes  $x$  e  $y$  (note que  $H$  tem  $n - 2$  vértices). Como  $x$  e  $y$  são adjacentes, eles não podem ter vizinhos em comum, pois caso contrário teríamos um triângulo em  $G$ . Assim, sabemos que  $|N_H(x) \cup N_H(y)| \leq n - 2$ , i.e., existem no máximo  $n - 2$  arestas entre os vértices de  $H$  e os vértices  $x$  e  $y$ . Portanto, lembrando que  $xy \in E(G)$  e aplicando a hipótese de indução em  $H$ , obtemos o seguinte.

$$e(G) \leq e(H) + (n - 2) + 1 \leq \frac{(n - 2)^2}{4} + n - 1 = \frac{n^2}{4}.$$

□

A demonstração do Teorema de Mantel por indução, apesar de simples, não nos permite obter informações sobre quais são os grafos sem triângulos que contém exatamente  $n^2/4$  arestas. Sabemos que o grafo bipartido completo balanceado  $K_{n/2, n/2}$  é um deles, mas será que existem outros? A resposta para essa pergunta é negativa. De fato,  $K_{n/2, n/2}$  é o único grafo sem triângulos com exatamente  $n^2/4$  arestas. Na seguinte demonstração do Teorema de Mantel provamos também esse fato.

*Demonstração 2 (Conjuntos independentes) - Teorema de Mantel.* Seja  $G$  um grafo



com  $n$  vértices sem triângulos e seja  $A$  o maior conjunto independente de  $G$ . A vizinhança de cada vértice  $v$  de  $G$  é um conjunto independente, pois caso contrário existiria um triângulo em  $G$ . Assim, para todo  $v \in V(G)$ , temos que  $d(v) \leq |A|$ . Seja  $B = V(G) \setminus A$ . Como  $A$  é independente, toda aresta de  $G$  tem um extremo em  $B$ . Portanto,

$$e(G) \leq \sum_{v \in B} d(v) \leq |A||B| \leq \left( \frac{|A| + |B|}{2} \right)^2 = \frac{n^2}{4}. \quad (2.5)$$

onde na última desigualdade utilizamos o fato de a média geométrica ser no máximo a média aritmética. A desigualdade (2.5) prova o Teorema de Mantel.

Analisemos agora para quais grafos  $G$  temos  $e(G) = n^2/4$ . Para que isso aconteça, precisamos ter igualdade nas três desigualdades de (2.5). Para termos igualdade na primeira delas, o grafo precisa ser bipartido, pois não devem existir arestas com os dois extremos em  $B$ . Para que a segunda desigualdade seja uma igualdade, precisamos que todo vértice em  $B$  seja vizinho de todos os vértices de  $A$ , de modo que precisamos ter um grafo bipartido completo. Por fim, para a terceira desigualdade ser uma igualdade, é necessário que  $|A| = |B|$ , de modo que  $G$  deve ser um grafo bipartido completo balanceado, i.e., o grafo  $K_{n/2, n/2}$ . Portanto, o único grafo com  $n$  vértices livre de triângulos que possui  $n^2/4$  arestas é o grafo  $K_{n/2, n/2}$ .  $\square$

Naturalmente, faz sentido perguntar qual a maior quantidade de arestas possível em um grafo que não contém grafos completos maiores que triângulos. O seguinte resultado generaliza o Teorema de Mantel para grafos completos de um dado tamanho arbitrário.

**Teorema 2.6: Teorema de Turán, 1941**

Seja  $r \geq 3$  um inteiro. Se  $G$  é um grafo com  $n$  vértices que não contém  $K_{r+1}$ , então  $G$  tem no máximo  $(1 - 1/r)n^2/2$  arestas.

*Demonstração.* Vamos provar o resultado por indução na quantidade de vértices do grafo. Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices que não contém  $K_{r+1}$ . Note que para  $n \leq r$  temos que  $e(G) \leq \binom{n}{2} \leq (1 - 1/r)n^2/2$ . Assim, podemos assumir que  $n > r$ . Suponha que o resultado é válido para todo grafo livre de  $K_{r+1}$  com menos que  $n$  vértices. Considere uma clique  $X$  com  $r$  vértices e seja  $Y = V(G) \setminus X$ , que é um conjunto com

$n - r$  vértices e como  $G$  é livre de  $K_{r+1}$  temos que  $G[Y]$  também é livre de  $K_{r+1}$ . Por hipótese de indução, temos que

$$e(G[Y]) \leq (1 - 1/r)(n - r)^2/2.$$

Como  $G$  é livre de  $K_{r+1}$ , sabemos que cada vértice de  $Y$  tem no máximo  $r - 1$  vizinhos em  $X$ . Portanto,

$$\begin{aligned} e(G) &= e(G[X]) + e(G[X, Y]) + e(G[Y]) \\ &\leq \binom{r}{2} + (r - 1)|Y| + (1 - 1/r)(n - r)^2/2 \\ &= (r - 1)(r/2) + (r - 1)(n - r) + (r - 1)(n - r)^2/(2r) \\ &= (1 - 1/r)n^2/2. \end{aligned}$$

□

---

## *Trilhas Eulerianas*

No ano de 1736, na cidade de Königsberg, na antiga Prússia, Euler resolveu um problema matemático que intrigava a população local. Havia na cidade duas ilhas que se conectavam entre si e com outras partes da cidade através de sete pontes (veja Figura 3.1 para ver a configuração das pontes). Uma pergunta que várias pessoas tentavam responder era sobre a possibilidade de atravessar as sete pontes passando somente uma vez por cada ponte. Euler deu uma resposta negativa para essa pergunta, mostrando que não é possível efetuar o trajeto proposto. Para resolver o problema, Euler modelou as partes de terra e as pontes como um grafo e percebeu que só seria possível realizar o percurso se existissem zero ou dois vértices com uma quantidade ímpar de arestas incidentes a eles.

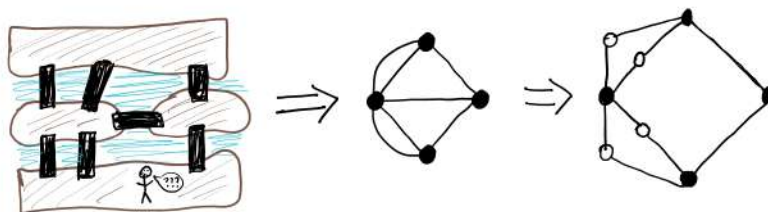


Figura 3.1: Configuração das setes pontes de Königsberg, modeladas em um multigrafo e em um grafo simples.

Em homenagem a Euler, uma trilha (lembre que em trilhas não há repetição de

arestas) que passa por todas as arestas de um grafo  $G$  é chamada de *trilha Euleriana*. Um grafo  $G$  é dito *euleriano* se  $G$  contém uma trilha Euleriana fechada. A Figura 3.2 contém um grafo e uma trilha Euleriana desse grafo.

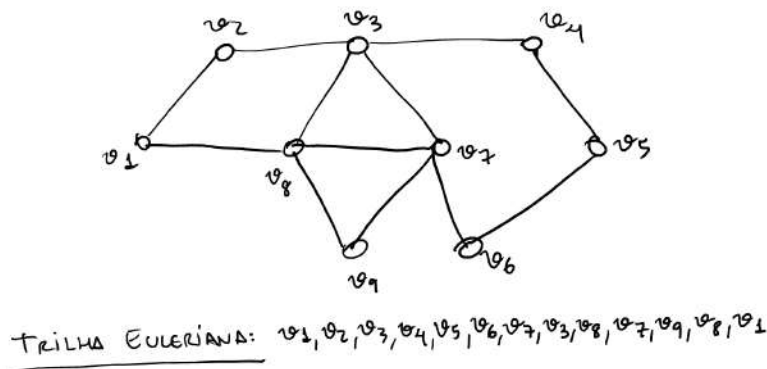


Figura 3.2: Exemplo de um grafo  $G$  e uma trilha Euleriana de  $G$ .

O seguinte resultado fornece uma condição necessária e suficiente para que um grafo seja euleriano.

### Teorema 3.1

Um grafo conexo  $G$  é euleriano se e somente se todos os vértices de  $G$  têm grau par.

*Demonstração 1 (Contradição).* Seja  $G$  um grafo conexo que contém uma trilha Euleriana fechada  $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$ , onde  $v_{k+1} = v_1$ . Para todo vértice interno  $v_i$  da trilha, as arestas  $v_{i-1}v_i$  e  $v_iv_{i+1}$  contribuem com duas unidades para o grau de  $v_i$ . Ademais, para  $v_1$ , que é o extremo inicial e final da trilha, as arestas  $v_1v_2$  e  $v_kv_1$  contribuem com duas unidades para o grau de  $v_1$ . Portanto, todo vértice de  $G$  tem grau múltiplo de dois.

Agora suponha que todos os vértices de  $G$  têm grau par. Considere uma trilha  $T$  de  $G$  com a maior quantidade de arestas dentre todas as trilhas possíveis. Seja  $v_1$  o vértice inicial de  $T$ . Primeiramente vamos provar o seguinte fato:

$$\text{A trilha } T \text{ é fechada.} \quad (3.1)$$

Suponha por contradição que  $T$  é aberta, i.e.,  $T$  termina em um vértice  $v \neq v_1$ . Assim, existe uma quantidade ímpar de arestas de  $T$  que incidem em  $v$ . Porém, como  $d(v)$  é par, existe pelo menos uma aresta  $vw$  incidente a  $v$  que não está em  $T$ . Assim, a trilha formada por  $T$  seguida do vértice  $w$  forma uma trilha com mais arestas que  $T$ , uma contradição com a escolha de  $T$ . Acabamos de mostrar que (3.1) é válida.

Resta mostrar que a trilha  $T$  é Euleriana. Assuma por contradição que  $T$  não é Euleriana, i.e.,  $T$  não contém todas as arestas do grafo  $G$ . Seja  $T = v_1, \dots, v_k, v_1$ . Como  $G$  é conexo, existe uma aresta  $v_i w \in E(G)$  que não está em  $T$ . Mas perceba que a trilha  $w, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, v_1, \dots, v_{i-1} v_i$  é uma trilha que contém todas as arestas de  $T$  e a aresta  $v_i w$ , uma contradição, uma vez que  $T$  tem a maior quantidade possível de arestas dentre todas as trilhas de  $G$ .  $\square$

*Demonstração 2 (Indução).* Seja  $G$  um grafo conexo tal que todos os vértices de  $G$  têm grau par. Vamos mostrar que  $G$  contém uma trilha Euleriana fechada.

Vamos provar por indução na quantidade de arestas de  $G$ . Se  $G$  não tem arestas, então como  $G$  é conexo, sabemos que  $G$  tem somente um vértice  $v$ . Portanto o resultado vale para  $G$ , pois  $v$  é uma trilha fechada que contém todos os vértices de  $G$ .

Suponha que todo grafo conexo com menos que  $|E(G)|$  arestas onde todos seus vértices tem grau par contém uma trilha Euleriana fechada. Como  $G$  é conexo e todos os vértices têm grau par, sabemos que  $\delta(G) \geq 2$ . Logo, pelo Teorema 1.4, o grafo  $G$  contém um ciclo  $C$ . Seja  $G'$  o grafo obtido de  $G$  pela remoção das arestas de  $C$ . Como somente arestas de um ciclo foram removidas, todos os vértices de  $G'$  têm grau par. Possivelmente  $G'$  não é conexo. Assim, considere suas componentes  $G_1, \dots, G_k$ . Por hipótese de indução, existem trilhas Eulerianas  $T_1, \dots, T_k$ , respectivamente, dos grafos  $G_1, \dots, G_k$ .

Seja  $C = v_1, \dots, v_\ell, v_1$  e sejam  $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$  os primeiros vértices de  $C$  (considerando a ordem  $v_1, \dots, v_\ell$ ) que intersectam, respectivamente,  $T_1, \dots, T_k$ , onde estamos considerando  $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$  como os vértices iniciais das trilhas  $T_1, \dots, T_k$ .

Seja  $C_1, \dots, C_k, C_{k+1}$ , respectivamente, as trilhas “ $v_1, \dots, v_{i_1-1}$ ”, “ $v_{i_1+1}, \dots, v_{i_2-1}$ ”,  $\dots$ , “ $v_{i_{k-1}+1}, \dots, v_{i_k-1}$ ”, “ $v_{i_k+1}, \dots, v_\ell$ ”. Note que  $C = C_1, v_{i_1}, C_2, v_{i_2}, \dots, C_k, v_{i_k}, C_{k+1}$ . Assim, a trilha  $T = C_1, T_1, C_2, T_2, \dots, C_k, T_k, C_{k+1}$  é uma trilha Euleriana fechada, pois começa e termina em  $v_1$  e cada arestas do grafo é usada na trilha exatamente uma vez.  $\square$

O teorema a seguir fornece uma condição necessária e suficiente para a existência de trilhas Eulerianas abertas em grafos conexos.

**Teorema 3.2**

Um grafo conexo  $G$  contém uma trilha Euleriana aberta se e somente se  $G$  tem exatamente dois vértices de grau ímpar.

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo conexo que contém uma trilha Euleriana aberta  $v_1, \dots, v_k$ . Para todo vértice interno  $v_i$  da trilha, as arestas  $v_{i-1}v_i$  e  $v_iv_{i+1}$  contribuem com duas unidades para o grau de  $v_i$ . Ademais, para  $v_1$  e  $v_k$ , os extremos da trilha, as arestas  $v_1v_2$  e  $v_{k-1}v_k$  contribuem respectivamente com uma unidade para o grau de  $v_1$  e  $v_k$ . Portanto,  $v_1$  e  $v_k$  têm grau ímpar e todos os outros vértices de  $G$  tem grau par.

Considere agora um grafo conexo  $G$  que contém exatamente dois vértices de grau ímpar, digamos  $u$  e  $v$ . Construa um grafo  $G'$  obtido de  $G$  pela adição da aresta  $uv$ . Como todos os vértices de  $G'$  têm grau par, podemos aplicar o Teorema 3.1 a  $G'$ . Assim, obtemos uma trilha Euleriana fechada  $T$  de  $G'$ . Se  $uv$  não é uma aresta da trilha  $T$ , então  $T$  é uma trilha euleriana fechada de  $G$ , logo  $G$  tem uma trilha euleriana aberta. Porém, se  $uv$  é uma aresta de  $T$ , então a trilha aberta obtida da remoção de  $uv$  de  $T$  é uma trilha euleriana de  $G$  (com extremos  $u$  e  $v$ ).  $\square$

Dado um grafo  $G$ , uma *decomposição* de  $G$  em ciclos, é uma partição de  $E(G)$  em conjuntos  $E_1, E_2, \dots, E_k$  tal que  $G[E_i]$  é um ciclo para todo  $1 \leq i \leq k$ . A Figura 3.3 ilustra a decomposição de um grafo  $G$  em ciclos.

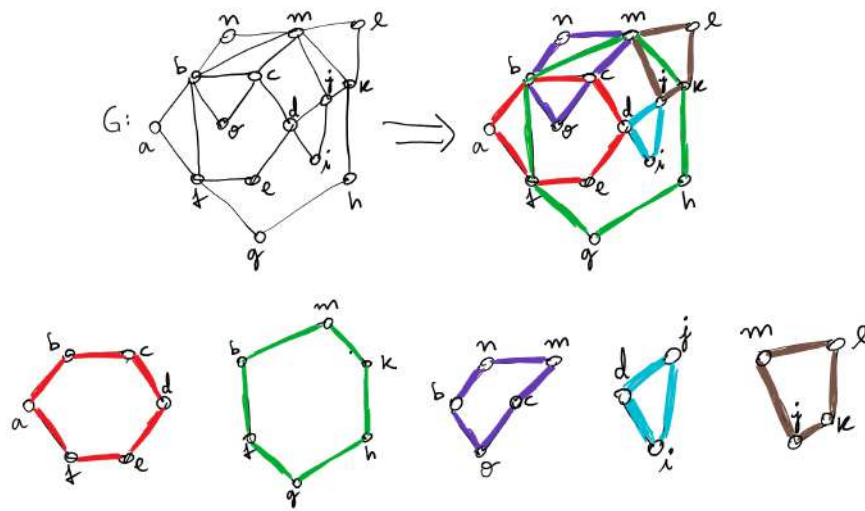


Figura 3.3: Grafo  $G$  e uma decomposição de  $G$  em ciclos.

### Teorema 3.3

Todos os vértices de um grafo  $G$  têm grau par se e somente se  $G$  admite uma decomposição em ciclos.

*Demonstração.* Se  $G$  admite uma decomposição em ciclos, então basta observar que todos os vértices de um ciclo têm grau 2 para concluir que todos os vértices de  $G$  têm grau par.

Vamos agora provar que se todos os vértices de um grafo  $G$  têm grau par então  $G$  admite uma decomposição em ciclos. Seja  $G$  um contra-exemplo minimal, i.e., um grafo com a menor quantidade de arestas possível tal que todos seus vértices têm grau par e  $G$  não admite decomposição em ciclos. Note que certamente  $G$  possui arestas, logo  $G$  tem algum vértice de grau dois. Pelo Teorema 1.4, sabemos que  $G$  tem um ciclo. Seja  $C$  um ciclo de  $G$  e considere o grafo  $G'$  obtido da remoção das arestas de  $C$  do grafo  $G$ . Como todos os vértices de um ciclo têm grau 2 e os vértices de  $G$  têm grau par, sabemos que todos os vértices de  $G'$  também têm grau par. Note que  $G'$  não admite uma decomposição em ciclos, pois se isso acontecesse, essa decomposição juntamente com  $C$  formaria uma decomposição em ciclos do grafo  $G$ . Logo, como  $e(G') < e(G)$ , temos uma contradição com a minimalidade de  $G$ .  $\square$

Um bom exercício é provar o Teorema 3.3 através da análise da estrutura de uma trilha Euleriana fechada.



---

# Árvores

Começemos este capítulo discutindo qual a relação entre quantidade de vértices e de arestas com a conexidade de um grafo. O seguinte fato garante uma quantidade mínima de arestas em um grafo conexo.

## Fato 4.1

Se  $G = (V, E)$  é um grafo conexo, então  $|E| \geq |V| - 1$ .

*Demonstração.* Se um grafo  $G$  tem somente um vértice, então o resultado vale trivialmente. Seja  $G = (V, E)$  um grafo conexo com  $n$  vértices. Suponha que todo grafo com  $k < n$  vértices possui pelo menos  $k - 1$  arestas.

Se  $\delta(G) \geq 2$ , então, pela Proposição 1.1, sabemos que

$$2|E| = \sum_{v \in V} d_G(v) \geq 2n.$$

Assim, temos que  $|E| \geq n$ , provando o resultado. Podemos então assumir que  $G$  contém pelo menos um vértice  $v$  de grau 1. Seja  $G' = G[V \setminus \{v\}]$ . Assim, como  $G$  é conexo e  $G'$  foi obtido de  $G$  pela remoção de um vértice de grau 1, sabemos que  $G'$  é conexo. Como  $|V(G')| = n - 1 < n$ , sabemos, pela hipótese de indução, que  $|E(G')| \geq |V(G')| - 1 = n - 2$ . Portanto, temos que  $|E| = |E(G')| + 1 \geq n - 1$ .  $\square$

O Fato 4.1 mostra que todo grafo conexo com  $n$  vértices possui pelo menos  $n - 1$  arestas. Naturalmente, podemos nos perguntar se é verdade que todo grafo com  $n$

vértices e pelo menos  $n - 1$  arestas é conexo. A resposta para essa pergunta é negativa, pois um momento de reflexão mostra que existem vários grafos com  $n$  vértices e mais que  $n - 1$  arestas que são desconexos. Por exemplo considere um grafo  $G = (V, E)$  com  $n$  vértices, onde existe uma partição de  $V$  em conjuntos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , com  $|A| = |B| = \lceil \sqrt{n} \rceil$  e  $|C| = n - 2\lceil \sqrt{n} \rceil$ , e  $E$  é o conjunto de todas arestas entre  $A$  e  $B$ . Assim, como não existem arestas incidentes a vértices de  $C$ , o grafo  $G$  é claramente desconexo. Ademais,  $G$  tem pelo menos  $n$  arestas.

Como visto no parágrafo anterior, existem grafos com  $n$  vértices e pelo menos  $n - 1$  arestas que não são conexos. Mas existem grafos com  $n$  vértices e exatamente  $n - 1$  arestas que são conexos? A resposta para essa pergunta é afirmativa e pode ser comprovada, por exemplo, por caminhos com  $n$  vértices e estrelas (grafos bipartidos completos  $K_{1, n-1}$ ), que são grafos com  $n$  vértices e exatamente  $n - 1$  arestas. Note que tanto caminhos como estrelas não contém ciclos. Uma última pergunta natural seria saber se grafos conexos com  $n$  vértices e exatamente  $n - 1$  arestas podem conter ciclos. O seguinte resultado responde essa pergunta. Vamos provar a proposição a seguir de três formas diferentes.

### Proposição 4.2

Seja  $G$  um grafo conexo com  $n$  vértices. Se  $G$  tem exatamente  $n - 1$  arestas, então  $G$  não contém ciclos.

*Demonstração 1 (Contradição).* Suponha por contradição que exista um grafo conexo  $G = (V, E)$  com  $n$  vértices e  $|E| = n - 1$  tal que  $G$  contém um ciclo  $C_\ell$  com  $\ell$  vértices.

Note que  $\ell < n$ , pois caso contrário o grafo  $G$  teria pelo menos  $\ell = n$  arestas. Assim, seja  $H = G[V \setminus V(C_\ell)]$  o subgrafo de  $G$  induzido pelos vértices fora do ciclo  $C_\ell$ . Sejam  $G_1, \dots, G_k$  as componentes de  $H$ . Pelo Fato 4.1, como cada uma das componentes é conexa, temos para  $1 \leq i \leq k$ , que

$$|E(G_i)| \geq |V(G_i)| - 1. \quad (4.1)$$

Note que, como  $G$  é conexo, para cada componente  $G_i$  existe pelo menos uma aresta com extremo em  $G_i$  e outro extremo em  $C_\ell$ . Assim, sabemos que  $|E| \geq \ell + (\sum_{i=1}^k |E(G_i)|) + k$ . Combinando esse fato com (4.1) e observando que  $n = \ell + \sum_{i=1}^k |V(G_i)|$ , obtemos o

seguinte:

$$|E| \geq \ell + \left( \sum_{i=1}^k |E(G_i)| \right) + k \geq \ell + \left( \sum_{i=1}^k |V(G_i)| - 1 \right) + k = \ell + \left( \sum_{i=1}^k |V(G_i)| \right) = n,$$

uma contradição, uma vez que  $|E| = n - 1$ .  $\square$

A seguinte prova segue por indução na quantidade de vértices.

*Demonstração 2 (Indução na quantidade de vértices).* Se um grafo  $G$  tem somente um vértice, então o resultado vale trivialmente. Seja  $G = (V, E)$  um grafo conexo com  $n$  vértices e exatamente  $n - 1$  arestas. Suponha que todo grafo com  $k < n$  vértices com exatamente  $k - 1$  arestas não contém ciclos.

Se  $\delta(G) \geq 2$ , então, pela Proposição 1.1, sabemos que

$$2n - 2 = 2|E| = \sum_{v \in V} d_G(v) \geq 2n,$$

um absurdo. Assim, podemos assumir que  $G$  contém pelo menos um vértice  $v$  de grau 1. Seja  $G' = G[V \setminus \{v\}]$ . O grafo  $G'$  é um grafo conexo com  $n - 1$  vértices e  $n - 2$  arestas. Por hipótese de indução,  $G'$  não contém ciclos. Portanto, como  $d_G(v) = 1$ , é impossível que  $v$  esteja em qualquer ciclo de  $G$ . Logo, concluímos que  $G$  não contém ciclos.  $\square$

Por fim, apresentamos uma prova por contradição mais simples que a primeira prova apresentada. Essa prova faz uso do Fato 4.1.

*Demonstração 3 (Contradição).* Seja  $G$  um grafo conexo com  $n$  vértices, exatamente  $n - 1$  arestas e que tenha ciclos. Seja  $C$  um ciclo de  $G$  e considere o grafo  $G'$  obtido de  $G$  com a remoção de uma aresta do ciclo  $C$ . Como a remoção de uma aresta de um ciclo não desconecta um grafo, sabemos que  $G'$  é conexo. Ademais,  $G'$  tem  $n$  vértices e  $|E| - 1 = n - 2$  arestas, uma contradição com o fato de todo grafo conexo com  $n$  vértices ter pelo menos  $n - 1$  arestas (veja Fato 4.1).  $\square$

Na proposição a seguir mostramos que a não existência de ciclos em um grafo conexo  $G$  com  $n$  vértices é condição suficiente para que  $G$  tenha exatamente  $n - 1$  arestas.

### Proposição 4.3

Seja  $G$  um grafo conexo com  $n$  vértices. Se  $G$  não contém ciclos, então  $G$  tem exatamente  $n - 1$  arestas.

*Demonstração.* Vamos provar por indução na quantidade de vértices de  $G$ . Se o grafo tem somente um vértice, então o resultado é válido, pois não há arestas. Suponha agora que todo grafo que não tem ciclos e tem  $k$  vértices, com  $k < n$ , tem exatamente  $k - 1$  arestas.

Seja  $G = (V, E)$  um grafo sem ciclos com  $n$  vértices e seja  $P = v_1, \dots, v_\ell$  o maior caminho de  $G$ . Note que o vértice  $v_1$  tem grau 1, pois não tem vizinhos dentro de  $P$ , uma vez que isso formaria um ciclo, e  $v_1$  também não têm vizinhos fora de  $P$ , pois isso formaria um caminho maior que  $P$ . O grafo  $G' = G[V \setminus \{v_1\}]$  obtido de  $G$  pela remoção de  $v_1$  tem  $n - 1$  vértices e não tem ciclos. Por hipótese de indução,  $G'$  tem exatamente  $n - 2$  arestas. Logo, como  $d_G(v_1) = 1$ , temos que  $G$  tem exatamente  $n - 1$  arestas.  $\square$

Um grafo é dito *acíclico* se não contém ciclos.

### Definição 4.4

Uma *árvore* é um grafo acíclico e conexo. Ademais, uma *floresta* é um grafo cujas componentes são árvores.

Um vértice  $v$  em uma árvore  $T$  é chamado de *folha* se  $d_T(v) = 1$ . Todo vértice que não é folha é chamado de vértice *interno* de  $T$ .

### Corolário 4.5

Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices.  $G$  é uma árvore se e somente se  $G$  é conexo e tem  $n - 1$  arestas.

*Demonstração.* Segue diretamente das Proposições 4.2 e 4.3.  $\square$

A proposição a seguir garante que ser conexo é uma condição necessária para que grafos com  $n$  vértices e  $n - 1$  arestas não tenham ciclos. Essa proposição pode

ser provada nas mesmas linhas da prova apresentada para a Proposição 4.3, mas apresentamos aqui outra prova.

#### Proposição 4.6

Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices e  $n - 1$  arestas. Se  $G$  não contém ciclos, então  $G$  é conexo.

*Demonstração.* Seja  $G = (V, E)$  um grafo com  $n$  vértices e  $n - 1$  arestas que não contém ciclos. Suponha por contradição que  $G$  não seja conexo. Como  $G$  não é conexo, existe uma partição de  $V$  em componentes  $G_1, \dots, G_k$ , onde  $k \geq 2$ . Cada componente  $G_i$  é um grafo conexo e não contém ciclos. Assim, pela Proposição 4.3 sabemos que  $|E(G_i)| = |V(G_i)| - 1$ . Portanto,

$$|E| = \sum_{i=1}^k (|V(G_i)| - 1) = n - k \leq n - 2,$$

onde a última desigualdade segue de  $k \geq 2$  e do fato de  $n = \sum_{i=1}^k |V(G_i)|$ . Mas temos uma contradição, uma vez que  $|E| = n - 1$ .  $\square$

O seguinte resultado fornece diferentes caracterizações para árvores.

### Teorema 4.7

Seja  $G = (V, E)$  um grafo tal que  $|V| = n$  e  $|E| = m$ . As seguintes afirmações são equivalentes.

1.  $G$  é uma árvore.
2. Entre quaisquer dois vértices de  $G$  existe um único caminho.
3.  $G$  é conexo, então toda aresta de  $G$  é uma ponte.
4.  $G$  é conexo e  $m = n - 1$ .
5.  $G$  é acíclico e  $m = n - 1$ .
6.  $G$  é acíclico e para todo par de vértices não adjacentes  $u$  e  $v$  temos que  $G[E \cup \{uv\}]$  tem exatamente um ciclo.

*Demonstração.* Dado um grafo  $G = (V, E)$  com  $|V| = n$  e  $|E| = m$ , vamos mostrar que  $1 \Rightarrow 2$ ,  $2 \Rightarrow 3$ ,  $3 \Rightarrow 4$ ,  $4 \Rightarrow 5$ ,  $5 \Rightarrow 6$ ,  $6 \Rightarrow 1$ .

( $1 \Rightarrow 2$ ) Por definição, se  $G$  é uma árvore, então  $G$  é conexo e acíclico. Suponha por contradição que existem vértices  $u$  e  $v$  tal que existem dois caminhos entre eles. Sejam  $P_1$  e  $P_2$  dois caminhos entre  $u$  e  $v$ . Considere o caminho mais longo  $P$  com início em  $u$  que pertence aos caminhos  $P_1$  e  $P_2$ . Seja  $w$  o último vértice de  $P$  e seja  $z$  o primeiro vértice comum a  $P_1$  e  $P_2$  que está após  $w$  nesses caminhos. Como os trechos de  $P_1$  e  $P_2$  entre  $w$  e  $z$  tem somente esses vértices em comum, eles formam um ciclo, uma contradição.

( $2 \Rightarrow 3$ ) Suponha que exista um único caminho entre quaisquer dois vértices de  $G$ . Portanto, o grafo é conexo, mas não contém ciclos. Considere agora uma aresta qualquer  $uv$  de  $G$  e seja  $G'$  o grafo  $G[E \setminus \{uv\}]$ . Suponha por contradição que  $G'$  é conexo. Logo, existe um caminho entre  $u$  e  $v$  em  $G'$ . Esse caminho juntamente com a aresta  $uv$  forma um ciclo em  $G$ , uma contradição.

( $3 \Rightarrow 4$ ) Seja  $G$  um grafo conexo tal que toda aresta de  $G$  é ponte. Sabemos do Teorema 1.7 que pontes não pertencem a ciclos, de onde concluímos que  $G$  é acíclico. Mas como  $G$  é conexo e acíclico, a Proposição 4.3 garante que  $m = n - 1$ .

(4  $\Rightarrow$  5) Se  $G$  é conexo e  $m = n - 1$ , então pela Proposição 4.2 sabemos que  $G$  é acíclico.

(5  $\Rightarrow$  6) Seja  $G$  um grafo acíclico e considere  $m = n - 1$ . Sejam  $u$  e  $v$  dois vértices quaisquer não adjacentes. Pela Proposição 4.6,  $G$  é conexo. Como  $G$  é acíclico e conexo, por definição,  $G$  é uma árvore. Como mostramos que 1  $\Rightarrow$  2, concluímos que existe um único caminho  $P$  entre  $u$  e  $v$  em  $G$ . Logo, a adição da aresta  $uv$  forma um único ciclo com  $P$ .

(6  $\Rightarrow$  1) Seja  $G$  um grafo acíclico tal que para todo par de vértices não adjacentes  $u$  e  $v$  o grafo  $G[E \cup \{uv\}]$  tem exatamente um ciclo. Com a existência desse ciclo, sabemos que em  $G$  existe um caminho entre  $u$  e  $v$ . Portanto,  $G$  é conexo. Como  $G$  é, por hipótese, acíclico, concluímos a prova.  $\square$

O seguinte resultado caracteriza os vértices de corte de uma árvore. Lembre que  $c(G)$  denota a quantidade de componentes de um grafo  $G$  e que um vértice é dito de corte se sua remoção aumenta a quantidade de componentes de  $G$ .

#### **Teorema 4.8**

Um vértice  $v$  de uma árvore é vértice de corte se e somente se  $v$  não é uma folha.

*Demonstração.* Seja  $T$  uma árvore. Comece notando que como  $T$  é um grafo conexo, então  $c(T) = 1$ .

Suponha que  $v$  é um vértice de corte de  $T$ . Logo,  $c(T - v) \geq 2$ . Dessa forma, sabemos que  $v$  é adjacente a vértices de todas as  $c(T - v)$  componentes de  $T - v$ , de onde concluímos que  $d_T(v) \geq 2$ . Portanto,  $v$  não é folha.

Considere agora um vértice  $v$  de  $T$  que não é folha. Logo,  $d_T(v) \geq 2$ , de modo que  $v$  é adjacente a pelo menos dois vértices, digamos,  $w$  e  $z$ . Pelo Teorema 4.7-2, sabemos que existe somente um caminho entre  $w$  e  $z$ . Como  $v$  está no caminho entre  $w$  e  $z$ , ao remover  $v$  de  $T$  obtemos um grafo sem caminhos entre  $w$  e  $z$ . Portanto,  $w$  e  $z$  estão em componentes distintas de  $T - v$ . Concluímos que  $c(T - v) \geq 2 > 1 = c(T)$ . Como a remoção de  $v$  de  $T$  aumentou a quantidade de componentes, temos que  $v$  é um vértice de corte.  $\square$

## 4.1 Árvore geradoras

Uma árvore *geradora* de um grafo  $G$  é um subgrafo gerador de  $G$  que é uma árvore.

### Teorema 4.9

Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.

*Demonstração.* Suponha por contradição que existam grafos conexos que não contém árvores geradoras. Seja  $G$  um contra exemplo aresta-minimal com relação à essa propriedade, i.e.,  $G$  é um dos grafos com a menor quantidade de arestas possível dentre o conjunto de todos os grafos que não contém árvores geradoras como subgrafos. Assim,  $G$  é um grafo conexo que não contém uma árvore geradora e todos os grafos conexos com menos arestas que  $G$  contém uma árvore geradora.

Vamos considerar dois casos possíveis, dependendo da existência de ciclos em  $G$ . Se  $G$  é acíclico, então, como  $G$  é conexo, sabemos que  $G$  é uma árvore (por definição). Portanto, o próprio grafo  $G$  é uma árvore geradora de  $G$ , uma contradição.

Assuma que  $G$  possui um ciclo  $C$ . Seja  $G'$  o grafo obtido da remoção de uma única aresta de  $C$ . Como a aresta removida pertence a um ciclo, o grafo  $G'$  é conexo. Como  $G'$  tem menos arestas que  $G$ , pela minimalidade de  $G$  concluímos que  $G'$  contém uma árvore geradora  $T$ . Mas  $G$  e  $G'$  têm o mesmo conjunto de vértices. Portanto,  $T$  também é uma árvore geradora de  $G$ , uma contradição com a escolha de  $G$ .  $\square$

Terminamos esta seção com o seguinte resultado.

### Teorema 4.10

Sejam  $T$  e  $T'$  árvores geradoras distintas de um grafo conexo  $G$ . Para cada aresta  $e \in T \setminus T'$ , existe uma aresta  $f \in T' \setminus T$  tal que  $T' - f + e$  e  $T - e + f$  são árvores geradoras de  $G$ .

*Demonstração.* Considere uma aresta  $e = uv \in E(T) \setminus E(T')$ . Pelo Teorema 4.7-2, o único caminho entre  $u$  e  $v$  é a aresta  $e$ . Assim, o grafo  $T - e$  é formado por duas componentes que são árvores, digamos,  $T_1$  e  $T_2$ .

Como  $T'$  é uma árvore geradora e  $e \notin T'$ , sabemos que existem arestas em  $T'$  que



tem um extremo em  $T_1$  e outro em  $T_2$ . Pelo Teorema 4.7-6, sabemos que o grafo  $T' + e$  contém somente um ciclo  $C'$ . Certamente existe uma aresta  $f$  de  $C'$  diferente de  $e$ , mas que tem também um extremo em  $T_1$  e outro em  $T_2$ . Assim, temos que  $T - e + f$  é um grafo acíclico com  $|V(G)|$  vértices e  $|V(G)| - 1$  arestas. Pelo Teorema 4.7-4, concluímos que  $T - e + f$  é uma árvore geradora de  $G$ .

Resta mostrar que  $T' - f + e$  é uma árvore geradora de  $G$ . Como  $f$  está no ciclo  $C'$  de  $T' + e$ , o grafo  $T' + e - f$  é acíclico. Como  $T' - f + e$  tem  $|V(G)|$  vértices e  $|V(G)| - 1$  arestas, pelo Teorema 4.7-4 concluímos  $T' - f + e$  que é uma árvore geradora de  $G$ .  $\square$



---

## Digrafos

Um *digrafo*  $D = (V_D, E_D)$  é uma estrutura composta por um conjunto de *vértices*  $V_D$  e um conjunto de *arestas* (ou arcos)  $E_D$  que é formado por pares **ordenados** de vértices. Muitas vezes vamos representar uma aresta  $e = (u, v)$  simplesmente como  $uv$ . Mas note que, diferente do caso de grafos, onde  $uv$  e  $vu$  representam a mesma aresta, em digrafos  $uv$  representa uma aresta de  $u$  para  $v$ , e  $vu$  representa uma aresta de  $v$  para  $u$ . Dado um digrafo  $D$ , denotamos por  $V(D)$  o conjunto de vértices de  $D$  e por  $E(D)$  o conjunto de arestas de  $D$ . Por simplicidade, escrevemos  $v(D)$  e  $e(D)$ , respectivamente, para  $|V(D)|$  e  $|E(D)|$ . Veja a Figura 5.1 para exemplos de representação gráfica de digrafos. Muitas definições e conceitos relacionados a grafos são estendidos a digrafos de forma natural. Aqui vamos definir e discutir as principais definições.

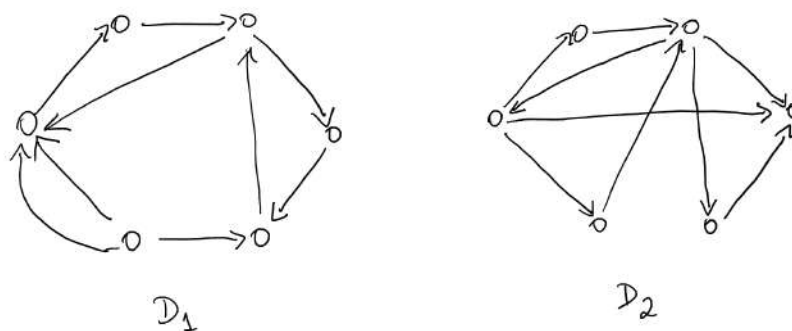


Figura 5.1: Representação gráfica de dois digrafos.

## 5.1 Vizinhança e subdigrafos

Dada uma aresta  $uv$  de um digrafo  $D = (V_D, E_D)$ , dizemos que  $u$  e  $v$  são, respectivamente, o *início* e o *fim* da aresta  $uv$ . Dizemos também que a aresta  $uv$  *sai* de  $u$  e *entra* em  $v$ . Como as arestas de um digrafo possuem são orientadas, definimos os graus dos vértices  $v$  de  $D$  separadamente, de acordo com a quantidade de arestas que entram e saem de  $v$ . A menos que indicado em contrário, assumimos que não existem duas arestas com mesmo início e fim.

A *vizinhança de saída*  $N_D^+(v)$  de um vértice  $v$  de um digrafo  $D = (V_D, E_D)$  é o conjunto dos vértices  $u$  em que existe uma aresta de  $v$  para  $u$ , i.e.,  $N_D^+(v) = \{u: vu \in E_D\}$ . Similarmente, definimos  $N_D^-(v) = \{u: uv \in E_D\}$  como o conjunto dos vértices  $u$  em que existe uma aresta de  $u$  para  $v$ . Definimos  $d_G^+(v) = |N_D^+(v)|$  e  $d_G^-(v) = |N_D^-(v)|$ , respectivamente, como o *grau de saída* e o *grau de entrada* de  $v$ . O *grau* de um vértice  $v$ , denotado por  $d_D(v)$ , é a soma dos graus de entrada e saída de  $v$ , i.e.,  $d_D(v) = d_D^-(v) + d_D^+(v)$ . Assim como no caso de grafos, quando estiver claro a que digrafo  $D$  estamos nos referindo, podemos omitir  $D$  das notações em que  $D$  está subscripto (e.g., usamos  $d^+(v)$  em vez de  $d_D^+(v)$ ).

Dado um conjunto  $X \subseteq V(D)$ , definimos a *vizinhança de saída* de  $X$  como  $N_D^+(X) = \bigcup_{x \in X} N_D^+(x)$ . Similarmente, definimos a *vizinhança de entrada* de  $X$  como  $N_D^-(X) = \bigcup_{x \in X} N_D^-(x)$ . Um vértice com vizinhança de saída vazia é chamado de *ralo* e um vértice com vizinhança de entrada vazia é chamado de *fonte*. O *grau mínimo de saída*  $\delta^+(D)$  e *grau mínimo de entrada*  $\delta^-(D)$  de um digrafo  $D$  são, respectivamente, o menor grau de saída e entrada dentre todos os vértices de  $D$ , i.e.,

$$\delta^+(D) = \min\{d^+(v) : v \in V(D)\} \quad \text{e} \quad \delta^-(D) = \min\{d^-(v) : v \in V(D)\}.$$

O *grau máximo de saída*  $\Delta^+(D)$  e *grau máximo de entrada*  $\Delta^-(D)$  de um digrafo  $D$  são, respectivamente, o maior grau de saída e entrada dentre todos os vértices de  $D$ , i.e.,

$$\Delta^+(D) = \max\{d^+(v) : v \in V(D)\} \quad \text{e} \quad \Delta^-(D) = \max\{d^-(v) : v \in V(D)\}.$$

Um digrafo  $D'$  é *subdigrafo* de um digrafo  $D$  se  $V(D') \subseteq V(D)$  e  $E(D') \subseteq E(D)$ . Dizemos também que  $D$  *contém*  $D'$ , e escrevemos  $D' \subseteq D$  para denotar essa relação. Um

*subdigrafo próprio*  $D'$  de  $D$  é um subgrafo de  $D$  tal que  $V(D') \neq V(D)$  ou  $E(D') \neq E(D)$ . O grafo  $G$  obtido da remoção da orientação de todas as arestas de um digrafo  $D$  é chamado de *grafo subjacente* de  $D$ . Note que caso existam arestas  $uv$  e  $vu$  em  $D$ , então o grafo subjacente  $G$  de  $D$  é um multigrafo, uma vez que contém duas arestas entre  $u$  e  $v$ . Perceba também que  $d_D(v) = d_G(v)$ . Se  $G$  é o grafo subjacente de um digrafo  $D$ , então dizemos que  $D$  é uma *orientação* de  $G$ . Um *torneio* é uma orientação de um grafo completo.

### Teorema 5.1

Seja  $D = (V_D, E_D)$  um digrafo. Temos  $|E_D| = \sum_{v \in V_D} d^+(v) = \sum_{v \in V_D} d^-(v)$ .

*Demonstração.* Cada aresta  $uv$  de  $D$  acrescenta exatamente uma unidade a  $\sum_{v \in V_D} d^+(v)$ , pois acrescenta uma unidade somente a  $d^+(u)$ . Similarmente, temos que  $uv$  acrescenta exatamente uma unidade a  $\sum_{v \in V_D} d^-(v)$ . Assim, temos

$$|E_D| = \sum_{v \in V_D} d^+(v) = \sum_{v \in V_D} d^-(v).$$

□

Um *caminho* em um digrafo é um digrafo  $P = (V_P, E_P)$  onde  $V_P = \{v_1, \dots, v_k\}$  é um conjunto de vértices distintos e  $E_P = \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq k-1\}$ . O grafo  $P + \{v_1 v_k\}$ , obtido de um caminho  $P = (V_P, E_P)$  com  $V_P = \{v_1, \dots, v_k\}$  e a aresta  $v_1 v_k$  é chamado de *ciclo*. Note que as arestas estão orientadas todas em um mesmo sentido. Um digrafo sem ciclos é dito *acíclico*.

### Teorema 5.2

Um digrafo acíclico contém pelo menos um ralo e pelo menos uma fonte.

*Demonstração.* Suponha por contradição que  $D = (V_D, E_D)$  é um grafo acíclico e não tem ralo ou não tem fonte. Podemos assumir que  $E_D \neq \emptyset$ , pois caso contrário todo vértice de  $D$  seria fonte e ralo. Sem perda de generalidade, suponha que  $D$  não tem fonte. Seja  $P = (v_1, \dots, v_k)$  um caminho em  $D$  maximal com relação à quantidade de vértices. Como  $v_1$  não é fonte, existe uma aresta  $uv_1 \in E_D$ . Como  $P$  é maximal,

$u$  pertence ao caminho  $P$ . Assim, temos  $u = v_i$  para algum  $2 \leq i \leq k$ . Portanto,  $(v_1, \dots, v_i, v_1)$  é um ciclo de  $D$ , uma contradição.  $\square$

### 5.1.1 Ordenação topológica

Dado um digrafo  $D = (V_D, E_D)$ , uma *ordenação topológica* de um grafo orientado  $D$  é uma ordenação do conjunto de vértices  $D$  tal que, para toda aresta  $uv$ , o vértice  $u$  aparece antes de  $v$  na ordenação. Assim, podemos pensar em cada uma das arestas orientadas  $uv$  como representando uma relação de precedência, indicando que  $v$  “vem depois” de  $u$ . Outra forma de definir uma ordenação topológica de  $D$  é como sendo uma rotulação  $f: V_D \rightarrow \{1, \dots, |V_D|\}$  injetiva tal que se  $uv \in E_D$  então  $f(u) < f(v)$ .

Nas Figura 5.2 abaixo temos um digrafo e rótulos que compõem uma ordenação topológica. Na Figura 5.3 esse digrafo está organizado respeitando a rotulação dada, permitindo observar que temos de fato uma ordenação topológica.

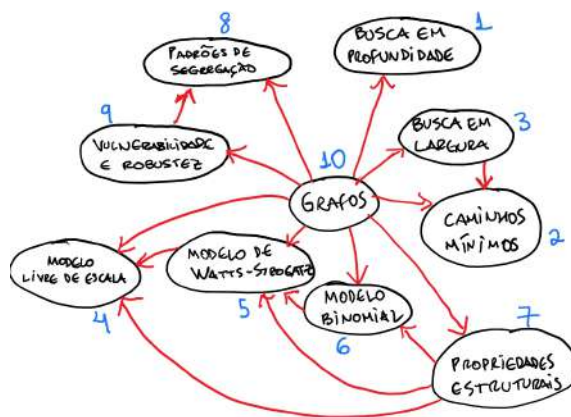


Figura 5.2: Um digrafo com uma rotulação que forma uma ordenação topológica.

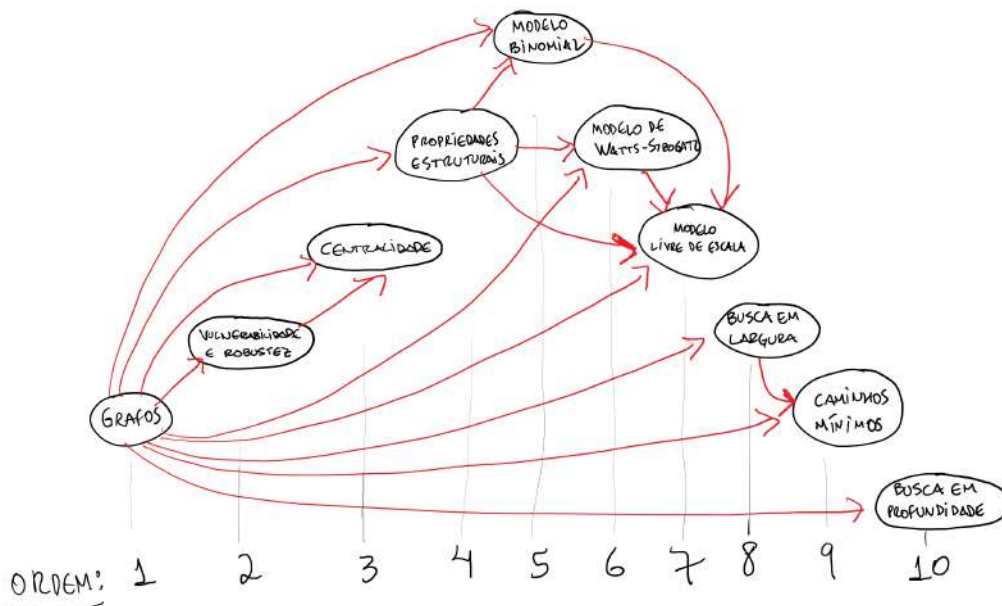


Figura 5.3: A ordenação topológica descrita na Figura 5.2 vista de forma organizada.

### Lema 5.3

Um digrafo  $D$  possui ordenação topológica se e somente se é acíclico.

*Demonstração.* Suponha por contradição que  $D$  possui uma ordenação topológica  $f$  e contém um ciclo  $C = (v_1, \dots, v_k, v_1)$ . Como as arestas do ciclo estão orientadas sempre de  $v_i$  para  $v_{i+1}$ , por definição, sabemos que  $f(v_1) < \dots < f(v_k) < f(v_1)$ , uma contradição.

Suponha agora que  $D$  não contém ciclos. Seja  $n$  a quantidade de vértices de  $D$ . Pelo Teorema 5.2,  $D$  contém um ralo  $v_n$ . Como  $v_n$  é um ralo, removendo  $v_n$  de  $D$ , obtemos um grafo acíclico  $D - v_n$ . Como o grafo obtido é acíclico, podemos sucessivamente remover ralos até chegar em um grafo vazio. Assim, defina  $D_n = D$  e sejam  $v_n, \dots, v_1$  os vértices removidos, nessa ordem. Seja  $D_i = D[v_1, \dots, v_i]$ , para  $i \leq n - 1$ , o digrafo obtido da remoção dos sucessivos ralos  $v_n, \dots, v_{i+1}$  do digrafo  $D$ . Assim, é fácil notar que  $v_i$  é ralo de  $D_i$  para todo  $1 \leq i \leq n$ . Afirmamos que  $f(v_i) = i$  para  $1 \leq i \leq n$  é uma ordenação topológica de  $D$ . De fato, perceba que para toda aresta  $v_i v_j$  de  $D$  temos

$i < j$ , pois caso  $i \geq j$  teríamos uma aresta de  $v_i$  para  $v_j$  no grafo  $D_i$ , mas  $v_i$  é ralo de  $D_i$ , uma contradição. Portanto, para toda aresta  $v_i v_j$  temos que  $f(v_i) = i < j = f(v_j)$ .  $\square$

A prova do Lema 5.3 acima fornece uma regra para a obtenção de um algoritmo que encontre uma ordenação topológica de um digrafo acíclico. Basta obter um ralo, removê-lo do digrafo (esse será o último vértice na ordenação topológica) e aplicar o mesmo procedimento sucessivamente.

### 5.1.2 Componentes fortemente conexas

Dado um digrafo  $D = (V_D, E_D)$ , uma *componente fortemente conexa* de  $D$  é um subgrafo  $D' = (V'_D, E'_D)$  maximal de  $D$  com respeito à seguinte propriedade: para todo par  $u, v \in V'_D$  existe um caminho de  $u$  para  $v$  e um caminho de  $v$  para  $u$  em  $D'$ . Sejam  $D_1, \dots, D_k$  o conjunto de todas as componentes fortemente conexas de  $D$ . Pela maximalidade das componentes, cada vértice pertence somente a uma componente e, mais ainda, entre quaisquer duas componentes  $D_i$  e  $D_j$  existem arestas apenas em um sentido, pois caso contrário o digrafo formado pela união disjunta de  $D_i$  e  $D_j$  formaria uma componente, contradizendo a maximalidade de  $D_i$  e  $D_j$ .

Seja  $D = (V_D, E_D)$  um digrafo com componentes fortemente conexas  $D_1, \dots, D_k$ . A *condensação* de  $D$ , denotada por  $C(D)$ , é um digrafo com conjunto de vértices  $\{w_1, \dots, w_k\}$ , onde  $w_i$  corresponde à componente  $D_i$ , e  $w_i w_j$  é uma aresta de  $C(D)$  se e somente se existem vértices  $v_i \in D_i$  e  $v_j \in D_j$  tal que  $v_i v_j \in E_D$ .

A Figura 5.4 contém dois digrafos  $D_1$  e  $D_2$  e suas componentes fortemente conexas estão identificadas. Ademais, essa figura contém a condensação desses dois digrafos.



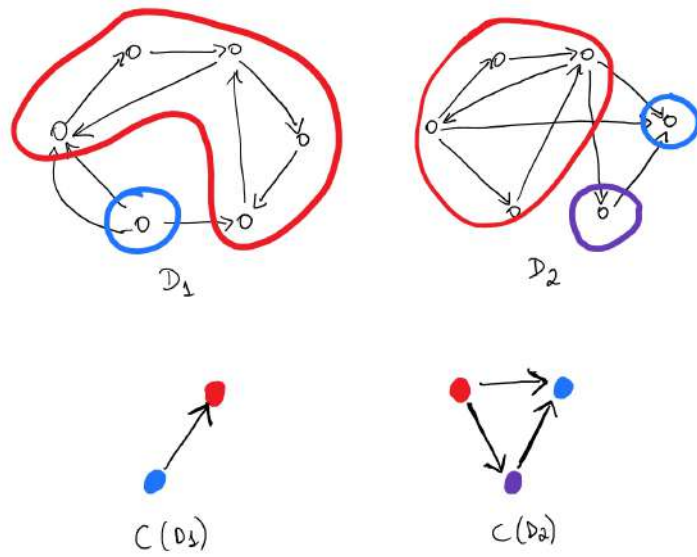


Figura 5.4: Dois digrafos com suas componentes fortemente conexas identificadas e suas respectivas condensações.

**Lema 5.4**

Seja  $D$  um digrafo. A condensação  $C(D)$  de  $D$  é um grafo acíclico.

*Demonstração.*

□



---

# Emparelhamentos

Um *emparelhamento*  $M$  em um grafo  $G = (V, E)$  é um conjunto de arestas duas a duas não adjacentes, i.e., um conjunto  $M$  de arestas tal que todo vértice é extremo de no máximo uma aresta de  $M$ .

Dado um grafo  $G = (V, E)$  e um conjunto de vértices  $X \subseteq V$ , dizemos que um emparelhamento  $M$  em  $G$  *cobre* ou *satura*  $X$  se cada vértice de  $X$  é incidente a uma aresta de  $M$ . Se uma aresta  $uv$  pertence a um emparelhamento  $M$ , então dizemos que  $u$  e  $v$  são *cobertos* ou *saturados* por  $M$ . Se um vértice  $v$  não é coberto por um emparelhamento  $M$ , então dizemos que  $v$  é *livre* em  $M$ . Por fim, um emparelhamento é dito *perfeito* se satura o conjunto de vértices de  $G$ .

## 6.1 Emparelhamentos máximos

Um emparelhamento é *máximo* em um grafo  $G = (V, E)$  se tem a maior quantidade de arestas possível dentre todos os emparelhamentos de  $G$ . Note que todo emparelhamento perfeito é máximo. Estamos interessados em encontrar emparelhamentos máximos e em verificar se um dado emparelhamento é máximo.

Um emparelhamento  $M$  em um grafo  $G = (V, E)$  é *maximal* se não existe um emparelhamento  $M'$  que contém  $M$  propriamente, i.e.,  $M \subseteq M'$  e  $M \neq M'$ . Assim, é fácil perceber que todo emparelhamento máximo também é maximal, mas nem todo emparelhamento maximal é máximo.

Um importante conceito relacionado a um emparelhamento  $M$  em um grafo  $G = (V, E)$  é o de *caminho  $M$ -alternante* em  $G$ , que é um caminho cujas arestas alternam

entre arestas de  $M$  e de  $E \setminus M$ . Esse caminho pode começar em uma aresta de  $M$  ou não. Formalmente, é um caminho  $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ , onde temos  $v_i v_{i+1} \in M$  se e somente se  $i$  é par, no caso de  $P$  começar em uma aresta de  $M$ . Caso  $P$  não comece em uma aresta de  $M$ , temos que  $v_i v_{i+1} \in M$  se e somente se  $i$  é ímpar.

O resultado a seguir foi obtido por Berge e caracteriza emparelhamentos máximos  $M$  de acordo com a existência de certos caminhos  $M$ -alternantes.

**Teorema 6.1: Berge, 1957**

Seja  $G = (V, E)$  um grafo. Um emparelhamento  $M$  é máximo em  $G$  se e somente se  $G$  não contém caminhos  $M$ -alternantes com ambos os extremos livres em  $M$ .

*Demonstração.* Seja  $M$  um emparelhamento máximo em  $G$ . Suponha por contradição que exista em  $G$  um caminho  $M$ -alternante  $P$  com ambos os extremos livres em  $M$ . Considere o conjunto de arestas

$$M' = (M \setminus E(P)) \cup (E(P) \setminus M).$$

Mostraremos que  $M'$  é um emparelhamento com mais arestas que  $M$ , chegando a uma contradição. Como  $M$  é um emparelhamento e os extremos de  $P$  são livres em  $M$ , nenhuma aresta de  $M \setminus E(P)$  é incidente a vértices de  $P$ . Assim, temos que  $M'$  é um emparelhamento. Como ambos os extremos de  $P$  são livres em  $M$ , temos  $|E(P) \setminus M| = |M \cap E(P)| + 1$ . Portanto,

$$\begin{aligned} |M'| &= |M \setminus E(P)| + |E(P) \setminus M| \\ &= |M \setminus E(P)| + |M \cap E(P)| + 1 \\ &= |M| + 1, \end{aligned}$$

uma contradição com o fato de  $M$  ser um emparelhamento máximo.

Suponha agora que  $G$  não contém caminhos  $M$ -alternantes com ambos os extremos livres em  $M$ . Vamos provar que  $M$  é máximo. Suponha por contradição que  $M$  não é máximo. Seja  $M'$  um emparelhamento máximo em  $G$  (claramente,  $|M'| > |M|$ ). Considere o grafo  $H = [\{M \setminus M'\} \cup \{M' \setminus M\}]$ , que é o subgrafo de  $G$  induzido pelas arestas que estão somente em um dos emparelhamentos  $M$  e  $M'$ .

Note que como  $M$  e  $M'$  são emparelhamentos,  $d_H(v) \leq 2$  para todo  $v \in V(H)$ . Assim, cada componente de  $H$  é um ciclo par ou um caminho que contém arestas alternadas de  $M$  e  $M'$ . Como  $|M'| > |M|$ , sabemos que o grafo  $H$  contém pelo menos uma componente que é um caminho  $P$  com mais arestas de  $M'$  que arestas de  $M$ . Portanto, a primeira e a última aresta de  $P$  são arestas de  $M'$ . Por fim, note que se os extremos de  $P$  são livres, uma vez que, caso contrário, se existisse uma aresta de  $M \setminus E(P)$  em  $G$  incidente ao primeiro ou último vértices de  $P$ , essa aresta estaria em  $H$ , e assim deveria estar em  $P$ . Concluimos assim que  $P$  é um caminho  $M$ -alternante com extremos livres em  $M$ , uma contradição.  $\square$

O resultado abaixo relaciona a quantidade de arestas de um emparelhamento máximo com a menor quantidade de vértices necessária para “cobrir” todas as arestas. Uma *cobertura* de um grafo bipartido  $G = (V, E)$  é um conjunto de vértices  $C \subseteq V$  tal que toda aresta de  $E$  tem pelo menos um de seus extremos em  $C$ . Uma *cobertura mínima* de  $G$  é uma cobertura com a menor quantidade de vértices possível.

**Teorema 6.2: König, 1931**

Seja  $G$  um grafo bipartido. A cardinalidade de um emparelhamento máximo em  $G$  é igual à cardinalidade de uma cobertura mínima de  $G$ .

## 6.2 Teorema de Hall

Um teorema clássico em Teoria dos Grafos é o Teorema do Casamento, ou Teorema de Hall, que fornece uma condição necessária e suficiente para que um grafo bipartido com bipartição  $(X, Y)$  tenha um emparelhamento que cobre  $Y$ .

**Teorema 6.3: Hall, 1935**

Seja  $G = (X, Y; E)$  um grafo bipartido. O grafo  $G$  contém um emparelhamento que cobre  $X$  se e somente se  $|N(S)| \geq |S|$  para todo  $S \subseteq X$ .

A condição “ $|N(S)| \geq |S|$  para todo  $S \subseteq X$ ” é conhecida como *condição de Hall*.

*Demonstração do Teorema 6.3.* Se  $G$  contém um emparelhamento que cobre  $X$ , então

claramente temos que  $|N(S)| \geq |S|$  para todo  $S \subseteq X$ .

Suponha que a condição de Hall é válida. Vamos mostrar que  $G$  contém um emparelhamento que cobre  $X$ . Provaremos o resultado por indução em  $|X|$ . O resultado é claramente válido para  $|X| = 1$ . Suponha que  $|X| = n \geq 2$  e que, para todo grafo bipartido  $H = (A, B; E)$  com  $|A| < |X|$ , o resultado é válido, i.e., se  $|N_H(S)| \geq |S|$  para todo  $S \subseteq A$ , então  $H$  contém um emparelhamento que cobre  $A$ .

Seja  $xy$  uma aresta de  $G$  com  $x \in X$  e  $y \in Y$  e considere o subgrafo  $H = G[(X \cup Y) \setminus \{x, y\}]$ . Se  $|N_H(S)| \geq |S|$  para todo  $S \subseteq X \setminus \{x\}$ , então por hipótese de indução sabemos que  $H$  contém um emparelhamento  $M$  que satura  $X \setminus \{x\}$  em  $H$ . Portanto, temos que  $M \cup \{xy\}$  é um emparelhamento de  $G$  que satura  $X$ . Assim, podemos assumir que

$$\text{existe } S \subseteq X \setminus \{x\} \text{ tal que } N_H(S) \leq |S| - 1.$$

Portanto, sabemos que  $N_G(S) \leq N_H(S) + 1 \leq |S|$ . Mas pela condição de Hall em  $G$ , sabemos que  $N_G(S) \geq |S|$ . Logo,

$$|N_G(S)| = |S|. \tag{6.1}$$

Considere o subgrafo  $G[S \cup N(S)]$  de  $G$  induzido por  $S \cup N(S)$ . Como  $|N_G(S')| \geq |S'|$  para todo  $S' \subseteq S$ , sabemos por hipótese de indução que  $G[S \cup N_G(S)]$  contém um emparelhamento  $M'$  que cobre  $S$  e  $N(S)$  (pois, por (6.1), temos  $|N_G(S)| = |S|$ ).

Nosso objetivo agora é encontrar um emparelhamento  $M''$  em  $G[(X \setminus S) \cup (Y \setminus N_G(S))]$  que cobre  $X \setminus S$ . Para todo  $T \subseteq X \setminus S$ , temos que

$$|N_G(S \cup T)| \geq |S \cup T| = |S| + |T| = |N_G(S)| + |T|. \tag{6.2}$$

Portanto, considerando o grafo  $J = G[(X \setminus S) \cup (Y \setminus N_G(S))]$  e utilizando (6.2), temos que para todo  $T \subseteq X \setminus S$  vale o seguinte:

$$\begin{aligned} |N_J(T)| &= |N_G(S \cup T)| - |N_G(S)| \\ &\geq (|N_G(S)| + |T|) - |N_G(S)| \\ &\geq |T|. \end{aligned}$$

Portanto, como a condição de Hall é válida para  $X \setminus S$  em  $J$ , por hipótese de indução, concluímos que  $J$  contém um emparelhamento  $M''$  que cobre  $X \setminus S$ .

Como  $M'$  é um emparelhamento de  $G[S \cup N_G(S)]$  que cobre  $S$ , e  $M''$  é um emparelhamento de  $G[(X \setminus S) \cup (Y \setminus N_G(S))]$  que cobre  $X \setminus S$ , concluímos que  $M' \cup M''$  é um emparelhamento que cobre  $X$ .  $\square$

O seguinte corolário do Teorema de Hall garante um emparelhamento grande no caso em que a condição de Hall não é satisfeita, mas uma versão mais fraca da mesma ainda é válida.

#### Corolário 6.4

Seja  $G = (X, Y; E)$  um grafo bipartido. Se, para um inteiro  $k$ , vale que  $|N(S)| \geq |S| - k$  para todo  $S \subseteq X$ , então  $G$  contém um emparelhamento com  $|X| - k$  arestas.

*Demonstração.* Seja  $Y'$  o conjunto de vértices  $Y \cup \{v_1, \dots, v_k\}$ , onde  $v_1, \dots, v_k$  são vértices que não estão em  $G$ . Considere o grafo bipartido  $H$  com bipartição  $(X, Y')$  tal que  $e \in E(H)$  se e somente se  $e \in E(G)$  ou  $e$  é uma aresta entre  $X$  e  $\{v_1, \dots, v_k\}$ . O grafo  $H$  tem todas as arestas de  $G$  e todas as arestas possíveis entre  $X$  e os vértices que não estão em  $G$ .

Note que para todo  $S \subseteq X$  temos  $|N_H(S)| \geq |S|$ , pois sabemos que  $|N_G(S)| \geq |S| - k$  e  $N_H(S)$  contém  $\{v_1, \dots, v_k\}$ . Portanto, pelo Teorema 6.3, sabemos que  $H$  contém um emparelhamento  $M$  que cobre  $X$  (logo, com  $|X|$  arestas). Como  $M$  pode conter até  $k$  arestas de  $E(H) \setminus E(G)$ , concluímos que  $M$  contém um emparelhamento de  $G$  com pelo menos  $|X| - k$  arestas.  $\square$

#### Corolário 6.5

Seja  $k$  um inteiro positivo. Todo grafo bipartido  $k$ -regular contém um emparelhamento perfeito.

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo bipartido  $k$ -regular e seja  $(X, Y)$  uma bipartição de  $G$ . Suponha que existe  $S \subseteq X$  com  $|N_G(S)| \leq |S| - 1$ . Seja  $E(S, N(S))$  o conjunto de

arestas entre  $S$  e  $N(S)$ . Assim, como  $G$  é  $k$ -regular, temos que

$$|S|k = |E(S, N(S))| \leq |S|k - k \leq |S|k - 1,$$

uma contradição. Portanto, concluímos que a condição de Hall é satisfeita. Pelo Teorema 6.3, concluímos que  $G$  contém um emparelhamento  $M$  que cobre  $X$ . O Teorema 2.2 garante que  $|X| = |Y|$ . Assim,  $M$  é um emparelhamento perfeito.  $\square$



---

## Conexidade

No Capítulo 1 discutimos o conceito de conexidade em grafos, onde definimos que um grafo  $G$  é *conexo* se para todo par de vértices  $u, v$  de  $G$  existe um caminho entre  $u$  e  $v$ . Neste capítulo investigamos quão “robusta” é a conexidade de um grafo, no sentido de quantos vértices ou arestas precisam ser removidos para que um dado grafo conexo de torne desconexo. Por exemplo, os grafos da Figura ?? são todos conexos, mas podemos dizer que alguns deles têm a conexidade mais “forte” que a de outros grafos.

Dado um grafo conexo  $G = (V, E)$  e conjuntos  $S \subseteq V$  e  $E \subseteq E$ , dizemos que  $S$  *separa*  $G$  se  $G[V \setminus S]$  é desconexo. Ademais, dizemos que  $E$  *separa*  $G$  se  $G[E \setminus E]$  é desconexo. Nesse caso dizemos que  $S$  e  $E$  são *separadores* de  $G$ . Se  $S$  separa  $G$  e vértices  $v$  e  $w$  estão em componentes distintas de  $G[V \setminus S]$ , então dizemos que  $S$  *separa*  $v$  de  $w$ .

### Definição 7.1: Grafos $k$ -conexos

Seja  $k$  um inteiro não negativo. Um grafo  $G = (V, E)$  é  $k$ -conexo se  $|V| \geq k + 1$  e para todo  $S \subseteq V$  com  $|S| \leq k - 1$  temos que  $G - S$  é conexo.

Pela definição acima temos que todo grafo é 0-conexo. Note também que um grafo  $G$  é 1-conexo se e somente se  $G$  é conexo e tem pelo menos dois vértices ( $K_2$  é um grafo completo). Perceba ainda que o grafo completo  $K_{k+1}$  é o único grafo com  $k + 1$  vértices que é  $k$ -conexo. Ademais, se um grafo  $G$  é  $(k + 1)$ -conexo, então claramente  $G$  é  $k$ -conexo.

Voltando nossa atenção agora para separadores formados por arestas, temos a

seguinte definição.

**Definição 7.2: Grafos  $k$ -aresta-conexos**

Seja  $k$  um inteiro não negativo. Um grafo  $G = (V, E)$  é  $k$ -aresta-conexo se  $|V| \geq 2$  e para todo  $F \subseteq E$  com  $|F| \leq k - 1$  temos que  $G - F$  é conexo.

Dado um grafo  $G = (V, E)$  e  $u, v \in V$ , dizemos que dois caminhos  $P$  e  $Q$  são *internamente disjuntos nos vértices* se os únicos vértices em comum de  $P$  e  $Q$  são  $u$  e  $v$ . O seguinte resultado fornece uma caracterização de grafos  $k$ -conexos e  $k$ -aresta-conexos que leva em conta a existência de caminhos disjuntos entre pares de vértices.

**Teorema 7.3**

Seja  $G = (V, E)$  um grafo e  $k$  um inteiro não negativo. Então o seguinte vale.

- $G$  é  $k$ -conexo se e somente se entre qualquer par de vértices existem  $k$  caminhos dois a dois internamente disjuntos nos vértices.
- $G$  é  $k$ -aresta-conexo se e somente se entre qualquer par de vértices existem  $k$  caminhos dois a dois disjuntos nas arestas.

Dado um grafo  $G$ , temos que  $\kappa(G) = 0$  se e somente se  $G$  é desconexo ou tem somente um vértice. Pensando em arestas, temos  $\kappa'(G) = 0$  se e somente se  $G$  é desconexo. Para o grafo completo, não é difícil ver que  $\kappa(K_n) = \kappa'(K_n) = n - 1$ .

Podemos agora definir os conceitos mais importantes deste capítulo, que descrevem a menor quantidade de vértices (e arestas) cuja remoção desconecta um grafo  $G$ .

**Definição 7.4: Conexidade e aresta-conexidade**

Seja  $G = (V, E)$  um grafo conexo.

- A *conexidade* de  $G$ , denotada por  $\kappa(G)$ , é o maior  $k$  tal que  $G$  é  $k$ -conexo.
- A *aresta-conexidade* de  $G$ , denotada por  $\kappa'(G)$ , de um grafo  $G$  é o maior  $k$  tal que  $G$  é  $k$ -aresta-conexo.

Abaixo temos outra forma de ver a conexidade e aresta-conexidade de um grafo que não é completo.

### Definição 7.5: *Conexidade e aresta-conexidade*

Seja  $G = (V, E)$  um grafo que não é completo.

- A *conexidade*  $\kappa(G)$  é o menor  $k$  tal que existe um separador  $U \subseteq V$  com  $|U| = k$ .
- A *aresta-conexidade*  $\kappa'(G)$  é o menor  $k$  tal que existe um separador  $F \subseteq E$  com  $|F| = k$ .

Note que se um grafo  $G$  é  $k$ -conexo, então  $\kappa(G) \geq k$ . Da mesma forma, se um grafo  $G$  é  $k$ -aresta-conexo, então  $\kappa'(G) \geq k$ . Na Figura ?? temos exemplos de grafos e os valores de suas conexidades e aresta-conexidades.

## 7.1 Relações entre conexidade e aresta-conexidade

### Proposição 7.6

Se  $G$  é uma árvore, ciclo ou grafo completo, então

$$\kappa(G) = \kappa'(G).$$

*Demonstração.*

□

### Proposição 7.7

Para todo grafo conexo  $G = (V, E)$  e toda aresta  $e \in E$  temos que

$$\kappa'(G) - 1 \leq \kappa'(G - e) \leq \kappa'(G).$$

*Demonstração.* Vamos primeiramente mostrar que  $\kappa'(G) - 1 \leq \kappa'(G - e)$ . Seja  $\ell$  a quantidade mínima de arestas cuja remoção do grafo  $G - e$  gera um grafo desconexo,

i.e.,  $\kappa'(G - e) = \ell$ . Claramente, a remoção de  $\ell$  dessas arestas e da aresta  $e$  desconecta o grafo  $G$ . Portanto, como existem  $\ell + 1$  arestas cuja remoção desconecta  $G$ , sabemos que

$$\kappa'(G) \leq \ell + 1 = \kappa'(G - e) + 1,$$

de onde concluímos que  $\kappa'(G) - 1 \leq \kappa'(G - e)$ .

Resta mostrar que  $\kappa'(G - e) \leq \kappa'(G)$ . Como existe um conjunto  $F \subseteq E$  com  $|F| = \kappa'(G)$  cuja remoção desconecta o grafo  $G$ , então certamente a remoção de  $F \setminus \{e\}$  desconecta  $G - e$ . Assim,  $\kappa'(G - e) \leq \kappa'(G)$ .  $\square$

### Proposição 7.8

Para todo grafo conexo  $G = (V, E)$  e todo vértice  $v \in V$  temos que

$$\kappa(G) - 1 \leq \kappa(G - v).$$

*Demonstração.* Note que, para todo separador  $S \subseteq V \setminus \{v\}$ , o conjunto  $S \cup \{v\}$  é um separador de  $G$ . Logo, temos  $\kappa(G) \leq \kappa(G - v) + 1$ .  $\square$

Note que, diferentemente do que ocorre com a aresta-conexidade, não é verdade que  $\kappa(G - v) \leq \kappa(G)$ . Na verdade, não vale que  $\kappa(G - v) \leq f(\kappa(G))$  para nenhuma função de  $\kappa(G)$ . A seguinte afirmativa mostra que isso não é possível.

### Afirmativa 7.9

Para todos os inteiros  $k$  e  $\ell$  com  $1 \leq k < \ell$ , existem grafos  $G = (V, E)$  tais que  $\kappa(G) = k$  e  $\kappa(G - v)$  para algum vértice  $v \in G$ .

*Demonstração.*  $\square$

O seguinte teorema relaciona  $\kappa(G)$  e  $\kappa'(G)$ .

### Teorema 7.10

Para todo grafo  $G = (V, E)$  com  $|V| \geq 2$  temos que

$$\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G).$$

*Demonstração.*

□



---

## *Caminhos e ciclos hamiltonianos*

Um caminho que passa por todos os vértices do grafo é chamado de *caminho hamiltoniano*. Da mesma forma, um ciclo que passa por todos os vértices de um grafo é um *ciclo hamiltoniano*. Um *grafo hamiltoniano* é um grafo que contém um ciclo hamiltoniano. Veja Figura 8.1 para exemplos de caminhos e ciclos hamiltonianos.

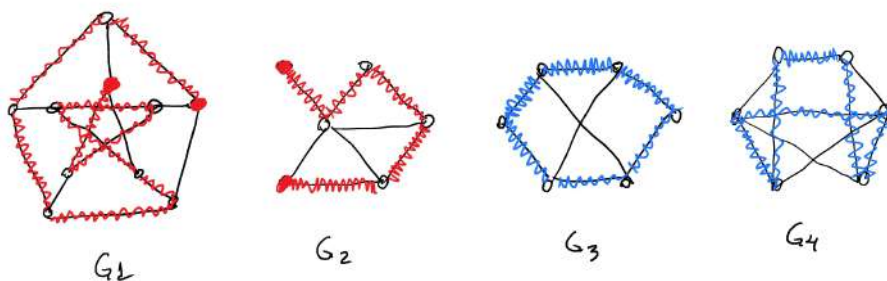


Figura 8.1: Grafos  $G_1$  e  $G_2$  com caminhos hamiltonianos indicados, e grafos  $G_3$  e  $G_4$  com ciclos hamiltonianos indicados.

Estamos interessados em saber que grafos contém caminhos ou ciclos hamiltonianos e, ainda mais, seria interessante encontrar tais caminhos e ciclos nesses grafos. Mas decidir se um grafo é hamiltoniano é um problema muito difícil (é um problema NP-completo), de modo que não se sabe uma boa caracterização para esses grafos.

A seguinte proposição garante uma condição necessária para que um grafo tenha um caminho ou um ciclo hamiltoniano. Lembre que  $c(G)$  é a quantidade de componentes de um grafo  $G$ .

### Proposição 8.1

Se  $G$  é um grafo hamiltoniano, então  $c(G - S) \leq |S|$  para todo  $S \subseteq V(G)$ .

*Demonstração.* Suponha por contradição que  $G$  contém um ciclo hamiltoniano  $C$  e que existe  $S \subset V(G)$  tal que  $c(G - S) > |S|$ . Sejam  $T_1, \dots, T_{c(G-S)}$  as  $c(G - S)$  componentes de  $G - S$ . Como cada  $T_i$  é uma componente de  $G - S$ , sabemos que não existem arestas entre essas componentes. Mas como  $C$  é um ciclo hamiltoniano, todo vértice de  $G$  está em  $C$ . Assim, para cada uma das componente de  $G - S$  existem duas arestas de  $C$  que são incidentes a vértices de  $T_i$  e vértices de  $S$ . Portanto, existem pelo menos  $2 \cdot c(G - S) > 2|S|$  arestas do ciclo hamiltoniano  $C$  que são incidentes a vértices de  $S$ . Logo, existe pelo menos um vértice de  $S$  com mais que duas arestas de  $C$ , uma contradição com o fato de  $C$  ser um ciclo.  $\square$

Porém, existem grafos  $G$  com  $c(G - S) \leq |S|$  para todo subconjunto  $S$  de vértices que não são hamiltonianos. Um exemplo é o grafo de Petersen.

Abaixo temos um clássico resultado que garante a existência de ciclos hamiltonianos em grafos em que todo vértice tem grau “grande”. Vamos demonstrar esse resultado de duas formas diferentes.

### Teorema 8.2: Teorema de Dirac, 1952

Seja  $G$  um grafo com  $n \geq 3$  vértices. Se  $\delta(G) \geq n/2$ , então  $G$  é hamiltoniano.

*Demonstração 1.* Seja  $G = (V, E)$  um grafo com  $n \geq 3$  vértices e  $\delta(G) \geq n/2$ . Começamos notando que  $G$  é conexo, pois como  $\delta(G) \geq n/2$  existe uma componente com mais que  $n/2$  vértices, de modo que caso  $G$  seja desconexo existiria uma componente com menos que  $n/2$  vértices e isso implicaria na existência de um vértice com grau menor que  $n/2$ .

Seja  $P = (v_1, \dots, v_k)$  um maior caminho de  $G$ . Assim, todos os vizinhos de  $v_1$  e  $v_k$  pertencem a  $P$ . Como  $d(v_1), d(v_k) \geq n/2$ , sabemos pelo princípio da casa dos pombos que existe um vértice  $v_i$  em  $P$  tal que  $v_{i+1} \in N(v_1)$  e  $v_i \in N(v_k)$ . Portanto, temos um ciclo

$$C = (v_1, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_k, v_i, v_{i-1}, \dots, v_1)$$



que contém todos os vértices de  $P$  (veja Figura 8.2).

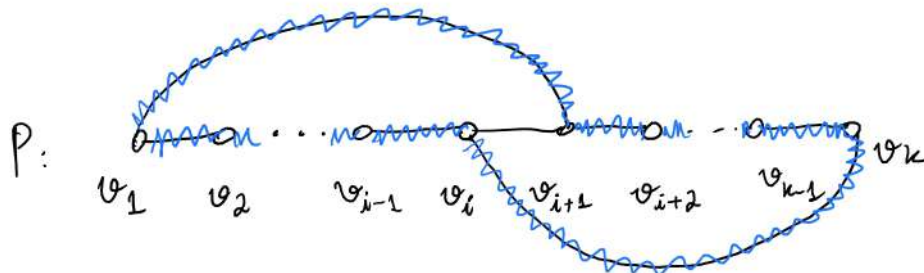


Figura 8.2: Ciclo  $C = (v_1, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_k, v_i, v_{i-1}, \dots, v_1)$  marcado em azul.

Caso exista um vértice de  $V$  que não está em  $C$ , pela conexidade de  $G$ , existiria uma aresta  $xv_j$  com  $x \notin V(C)$ . Mas então essa aresta juntamente com um caminho gerador de  $C$  formaria um caminho maior que  $P$ , uma contradição. Portanto,  $C$  é um ciclo hamiltoniano de  $G$ .  $\square$

*Demonstração 2.* Suponha por contradição que o resultado é falso. Assim, seja  $G = (V, E)$  um grafo com  $n \geq 3$  vértices e  $\delta(G) \geq 3$  que não é hamiltoniano e tem a maior quantidade de arestas possível. Assim, a adição de qualquer aresta a  $G$  o torna um grafo hamiltoniano, i.e.,  $G + uv$  é hamiltoniano para todo par de vértices não adjacentes.

Sejam  $u$  e  $v$  dois vértices não adjacentes. Considere o grafo  $H = G + uv$ . Como  $H$  é hamiltoniano (pela maximalidade de  $G$ ), existe um ciclo hamiltoniano em  $H$  e esse ciclo certamente contém a aresta  $uv$ , uma vez que  $G$  não é hamiltoniano. Logo,  $H$  contém um caminho hamiltoniano

$$P_H = (u = v_1, \dots, v_n = v).$$

Defina dois conjuntos  $U$  e  $W$  como segue:

$$U = \{v_i : v_i \in N_G(u)\} \quad \text{e} \quad W = \{v_i : v_{i-1} \in N_G(v)\}.$$

Note que

$$U \cap W = \emptyset,$$

pois caso contrário  $C = (u, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{n-1}, v, v_{i-1}v_{i-2}, \dots, u)$  seria um ciclo hamiltoniano em  $G$  (veja Figura 8.3), uma contradição com a escolha de  $G$ .

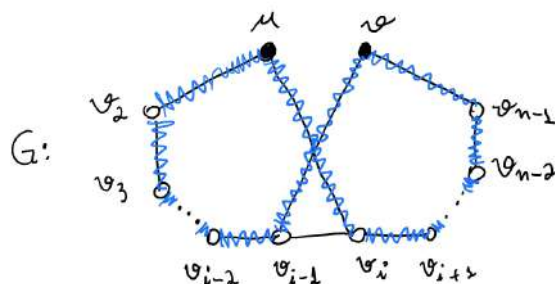


Figura 8.3: Ciclo  $C = (u, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{n-1}, v, v_{i-1}v_{i-2}, \dots, u)$  marcado em azul.

Agora perceba que  $u \notin U \cup W$ . Portanto,  $|U \cup W| \leq n - 1$ . Logo,

$$n - 1 \geq |U \cup W| = |U| + |W| - |U \cap W| = |U| + |W| = d_G(u) + d_G(v) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n,$$

um absurdo. □

A condição  $\delta(G) \geq n/2$  no Teorema de Dirac não pode ser melhorada. De fato, note que o grafo  $G$  com uma quantidade ímpar  $n$  de vértices formado por dois subgrafos completos com  $(n + 1)/2$  vértices que intersectam em exatamente um vértice satisfaz  $\delta(G) = (n - 1)/2$  e não possui ciclo hamiltoniano.

A  $k$ -ésima potência de um grafo  $H$ , denotada por  $H^k$ , é o grafo obtido de  $H$  através da adição de arestas entre quaisquer pares de vértices que estão à distância no máximo  $k$  em  $H$ . Uma importante conjectura, enunciada abaixo, generaliza o Teorema de Dirac.

**Conjectura 8.3: Conjectura de Pósa–Seymour, 1974**

Seja  $G$  um grafo com  $n \geq 3$  vértices e seja  $k$  um inteiro positivo. Se

$$\delta(G) \geq \left( \frac{k}{k+1} \right) n,$$

então  $G$  contém a  $k$ -ésima potência de um ciclo hamiltoniano.

Note que para  $k = 1$ , a Conjectura de Pósa–Seymour é exatamente o Teorema de Dirac. Para  $k \geq 2$  a conjectura foi provada para grafos com uma quantidade suficientemente grande de vértices por Komlós, Sárközy e Szemerédi.

A segunda demonstração apresentada é importante pois pode ser usada para provar os Teorema de Bondy–Chvátal e Ore, apresentados abaixo.

**Teorema 8.4: Teorema de Bondy–Chvátal, 1976**

Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices. Se  $G$  contém vértices não adjacentes  $u$  e  $v$  tais que  $d(u) + d(v) \geq n$ , então o seguinte vale. O grafo  $G$  é hamiltoniano se e somente se  $G + uv$  é hamiltoniano.

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices e sejam  $u$  e  $v$  vértices não adjacentes tais que  $d(u) + d(v) \geq n$ . Claramente, se  $G$  é hamiltoniano, então  $G + uv$  é hamiltoniano.

Resta provar que se  $G + uv$  é hamiltoniano, então  $G$  é hamiltoniano. Assim, suponha que  $G + uv$  é hamiltoniano. A prova é essencialmente igual à segunda demonstração que demos para o Teorema de Dirac (Teorema 8.2). Por completude, apresentamos essa prova (de forma sucinta).

Como  $G + uv$  é hamiltoniano, então contém um caminho hamiltoniano

$$P = (u = v_1, \dots, v_n = v).$$

Defina  $U = \{v_i : v_i \in N_G(u)\}$  e  $W = \{v_i : v_{i-1} \in N_G(v)\}$  e note que  $U \cap W = \emptyset$ , pois caso contrário existiria um ciclo hamiltoniano em  $G$ , uma contradição. Como  $u \notin U \cup W$ , temos que  $|U \cup W| \leq n - 1$ . Logo,

$$n - 1 \geq |U \cup W| = |U| + |W| - |U \cap W| = |U| + |W| = d_G(u) + d_G(v) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n,$$

um absurdo. □

O teorema abaixo segue diretamente da demonstração do Teorema de Dirac.

**Teorema 8.5: Teorema de Ore, 1960**

Seja  $G$  um grafo com  $n \geq 3$  vértices. Se para todo par de vértices não adjacentes  $\{u, v\}$  vale que  $d(u) + d(v) \geq n$ , então  $G$  é hamiltoniano.

Lembre que um *torneio* é uma orientação de um grafo completo. O resultado abaixo afirma que todo torneio tem um caminho hamiltoniano (seguindo a orientação das arestas).

**Teorema 8.6: Rédei, 1934**

Todo torneio possui um caminho hamiltoniano.

*Demonstração.* Suponha por contradição que existe um torneio  $D$  que não possui um caminho hamiltoniano. Seja  $P = (v_1, \dots, v_k)$  um caminho maximal em  $D$  e considere um vértice  $u \in D \setminus V(P)$ . Pela maximalidade de  $P$  sabemos que  $uv_k$  é um arco. Dizemos que  $uv_i$  é um arco para todo  $1 \leq i \leq v_k$ . De fato, caso contrário, seja  $j$  o menor índice tal que  $v_j u$  é um arco. Então o caminho  $P' = v_1, \dots, v_j, u, v_{j+1}, \dots, v_k$  seria um caminho maior que  $P$ , uma contradição. Assim, temos que  $uv_1$  é um arco, de onde concluímos que  $u, v_1, \dots, v_k$  é um caminho maior que  $P$ , uma contradição. □

---

## *Coloração de vértices*

Uma *coloração* dos vértices de um grafo  $G = (V, E)$  é uma função  $\chi: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$  que associa, dentre  $k$  “cores”, uma cor para cada um dos vértices de  $G$ . Se para todo par  $\{u, v\}$  de vértices adjacentes de  $G$  temos  $\chi(u) \neq \chi(v)$ , então dizemos que a coloração  $\chi$  é *própria*. Uma forma útil de ver uma coloração própria de  $V$  é como uma partição de  $V$  em conjuntos independentes  $X_1, \dots, X_k$ , onde cada  $X_i$  é um conjunto independente contendo todos os vértices com a cor  $i$  (veja Figura 9.1). Dizemos que uma coloração própria com  $k$  cores é uma  $k$ -coloração de  $G$ . Se  $G$  é um grafo que admite uma  $k$ -coloração, então sabemos que é possível colorir  $G$  de forma própria utilizando no máximo  $k$  cores. Por fim, dizemos que um grafo é  $k$ -colorível se admite uma  $k$ -coloração. Portanto, se  $G$  é um grafo  $k$ -colorível, então  $G$  é  $\ell$ -colorível para todo inteiro  $\ell \geq k$ .

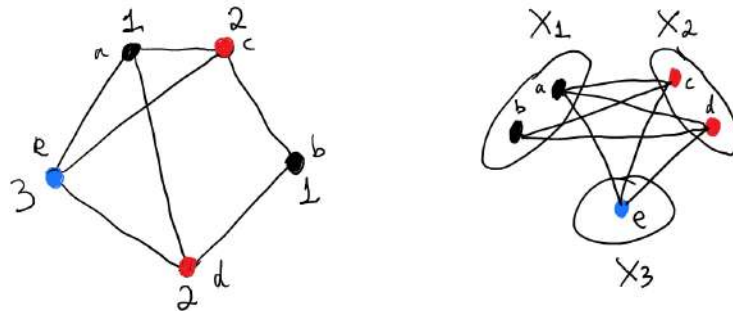


Figura 9.1: Grafo com uma coloração própria com 3 cores sendo representada de duas formas diferentes.

## 9.1 Colorações mínimas de vértices

Dado um grafo  $G = (V, E)$ , certamente existe uma coloração própria de  $V$  com  $|V|$  cores. Basta dar uma cor diferente para cada um dos vértices. Assim, é interessante saber qual a menor quantidade  $k$  de cores para o qual um dado grafo é  $k$ -colorível.

Uma *coloração mínima* de um grafo  $G$  é uma coloração própria dos vértices de  $G$  com a menor quantidade possível de cores.

### Definição 9.1

O *número cromático* de um grafo  $G$ , denotado por  $\chi(G)$  é a quantidade de cores de uma coloração mínima de  $G$ .

O problema de determinar o número cromático de um grafo  $G$  é um problema desafiador (um problema NP-difícil). Na Figura 9.2 temos exemplos de alguns grafos e seus respectivos números cromáticos.

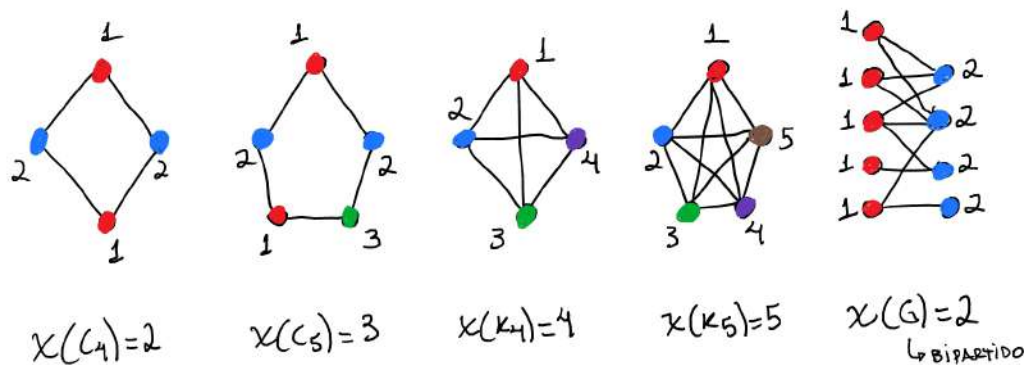


Figura 9.2: Grafos com colorações mínimas e seus números cromáticos.

Para se obter um limite superior  $k$  para  $\chi(G)$  basta mostrar que existe uma coloração de  $V(G)$  com  $k$  cores. Por outro lado, para se obter um limitante inferior  $k$  para  $\chi(G)$  precisamos mostrar que nenhuma coloração própria de  $G$  tem menos que  $k$  cores.

Um limitante inferior trivial para o número cromático de um grafo  $G$  é  $\chi(G) \geq \omega(G)$ , onde  $\omega(G)$  é o tamanho da maior clique contida no grafo  $G$ . Mas existem grafos  $G$  em que  $\chi(G)$  é maior que  $\omega(G)$ , como é o exemplo de qualquer ciclo ímpar  $C_{2k+1}$ , onde temos  $\chi(C_{2k+1}) = 3$  e  $\omega(C_{2k+1}) = 2$ . Como para qualquer grafo  $G$  existe uma coloração de  $V(G)$  com  $\chi(G)$  cores e cada classe de cor forma um conjunto independente, sabemos que, temos  $\chi(G) \geq |V|/\alpha(G)$ , onde  $\alpha(G)$  denota o tamanho do maior conjunto independente de  $G$ . O seguinte resultado apresenta um limitante superior para o número cromático de grafos quaisquer.

### Proposição 9.2

Para todo grafo  $G = (V, E)$  temos

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2|E| + \frac{1}{4}}.$$

*Demonstração.* Seja  $\{X_1, \dots, X_k\}$  uma coloração mínima  $\chi$  de  $G$ . Para todo  $X_i$  e  $X_j$  com  $1 \leq i < j \leq k$  existe pelo menos uma aresta com um extremo em  $X_i$  e outro em  $X_j$ , pois caso contrário podíamos dar a mesma cor para os vértices de  $X_i$  e  $X_j$ , obtendo

uma coloração com menos que  $k$  cores, contradizendo o fato de  $\chi$  ser mínima. Portanto, como existem  $\binom{k}{2}$  pares de classes  $\{X_i, X_j\}$ , sabemos que  $|E| \geq \binom{k}{2} = (k^2 - k)/2$ , de onde concluímos que

$$k \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2|E| + \frac{1}{4}}.$$

□

Também é possível obter um limitante superior para o número cromático de um grafo  $G$  que é relacionado com o grau máximo de  $G$ .

### Teorema 9.3

Para todo grafo  $G$  temos que

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

*Demonstração.* Vamos provar o resultado por indução na quantidade de vértices de  $G$ . Se  $G$  tem somente um vértice, então o resultado é claramente válido. Seja  $G = (V, E)$  um grafo com  $n \geq 2$  vértices e suponha que  $\chi(H) \leq \Delta(H) + 1$  para todo grafo  $H$  com menos que  $n$  vértices.

Seja  $H = G - v$ , onde  $v$  é um vértice qualquer de  $G$ . Por hipótese de indução, sabemos que  $\chi(H) \leq \Delta(H) + 1$ . Seja  $\{X_1, \dots, X_{\chi(H)}\}$  uma coloração mínima de  $H$ . Como  $\Delta(H) \leq \Delta(G)$ , temos que

$$\chi(H) \leq \Delta(H) + 1 \leq \Delta(G) + 1. \quad (9.1)$$

Se a condição  $\chi(H) \leq \Delta(G)$ , que é mais forte que (9.1), fosse válida, então como  $\{\{v\}, X_1, \dots, X_{\chi(H)}\}$  é uma coloração de  $G$  com  $\chi(H) + 1$  cores, teríamos que  $\chi(G) \leq \chi(H) + 1 \leq \Delta(G) + 1$ , que é o que queremos provar. Portanto, podemos assumir que

$$\chi(H) = \Delta(G) + 1.$$

Como  $d_G(v) \leq \Delta(G) = \chi(H) - 1$ , sabemos que  $v$  tem no máximo  $\chi(H) - 1$  vizinhos. Logo,  $v$  tem vizinhos em no máximo  $\chi(H) - 1$  conjuntos em  $\{X_1, \dots, X_{\chi(H)}\}$ . Assim, existe algum conjunto  $X_i$  em  $\{X_1, \dots, X_{\chi(H)}\}$  tal que  $v$  não contém nenhum vizinho



de  $X_i$ . Portanto,  $\{X_1, \dots, X_{i-1}, X_i \cup \{v\}, X_{i+1}, \dots, X_{\chi(H)}\}$  é uma coloração própria de  $G$  com  $\chi(H)$  cores (veja Figura 9.3).

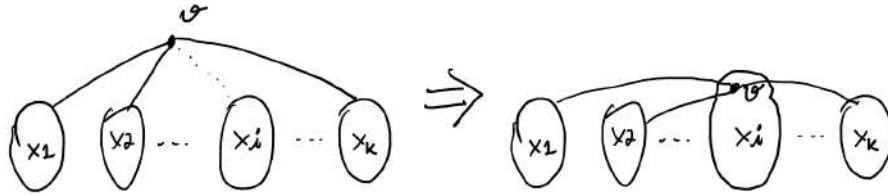


Figura 9.3: Coloração  $\{X_1, \dots, X_{i-1}, X_i \cup \{v\}, X_{i+1}, \dots, X_{\chi(H)}\}$ .

Como  $G$  é  $\chi(H)$ -colorível, temos o limitante superior  $\chi(G) \leq \chi(H) = \Delta(G) + 1$ .  $\square$

O Teorema 9.3 fornece o melhor limitante possível, pois ciclos  $C_{2\ell+1}$  com uma quantidade ímpar de vértices tem  $\chi(C_{2\ell+1}) = 3 = \Delta(C_{2\ell+1}) + 1$ . Outro exemplo é o grafo completo com  $n$  vértices, para o qual temos  $\chi(K_n) = n - 1 = \Delta(K_n)$ . Porém, a diferença entre  $\chi(G)$  e  $\Delta(G) + 1$  pode ser muito grande. Por exemplo, para a estrela com  $n + 1$  vértices (grafo bipartido completo  $K_{1,n}$ ) temos  $\Delta(K_{1,n}) = n$  e  $\chi(K_{1,n}) = 2$ .

Se um grafo  $G$  não é um ciclo ímpar e nem um grafo completo, então temos um limitante superior levemente melhor para  $\chi(G)$ .

**Teorema 9.4: Teorema de Brooks, 1941**

Se  $G$  é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar nem um grafo completo, então

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$



---

## Coloração de arestas

Uma *coloração* das arestas de um grafo  $G = (V, E)$  é uma função  $\chi: E \rightarrow \{1, \dots, k\}$  que associa um dentre  $k$  “cores” para cada uma das arestas de  $G$ . Se para todo par  $\{uv, vw\}$  de arestas adjacentes de  $G$  temos  $\chi(uv) \neq \chi(vw)$ , então dizemos que a coloração  $\chi$  é *própria*. Assim como em coloração de vértices, pode ser útil ver a coloração de um ponto de vista diferente: uma coloração própria de  $E$  é uma partição de  $E$  em emparelhamentos  $E_1, \dots, E_k$ , onde cada  $E_i$  é o conjunto de todas as arestas coloridas com a cor  $i$ . Dizemos que uma coloração própria com  $k$  cores é uma *k-aresta-coloração* de  $G$ . Se  $G$  é um grafo que admite uma *k-aresta-coloração*, então sabemos que é possível colorir as arestas de  $G$  de forma própria utilizando no máximo  $k$  cores. Por fim, dizemos que um grafo é *k-aresta-colorível* se admite uma *k-coloração*. Portanto, se  $G$  é um grafo *k-colorível*, então  $G$  é *l-colorível* para todo inteiro  $l \geq k$ .

### 10.1 Colorações mínimas de arestas

Dado um grafo  $G = (V, E)$ , estamos interessados em saber a menor quantidade  $k$  de cores tal que existe uma coloração própria de  $E$  com  $k$  cores. Uma *coloração mínima* das arestas de um grafo  $G$  é uma coloração própria das arestas de  $G$  com a menor quantidade possível de cores. O *índice cromático* de um grafo  $G$ , denotado por  $\chi'(G)$ , é a quantidade de cores de uma coloração mínima de  $E$ .

Claramente temos

$$\chi'(G) \geq \Delta(G), \tag{10.1}$$

pois cada uma das  $\Delta(G)$  arestas incidentes a um vértice  $v$  de grau máximo precisam ter uma cor diferente. Temos também o seguinte limitante inferior.

### Afirmativa 10.1

Para todo grafo  $G = (V, E)$  vale que

$$\chi'(G) \geq \left\lceil \frac{|E|}{\lfloor |V|/2 \rfloor} \right\rceil.$$

*Demonstração.* Considere uma coloração própria  $\varphi$  arbitrária de  $E$  com  $k$  cores. Como  $\varphi$  é um conjunto de  $k$  emparelhamentos e obviamente cada emparelhamento tem no máximo  $\lfloor |V|/2 \rfloor$  arestas, concluímos que  $|E| \leq k \lfloor |V|/2 \rfloor$ . Como  $k$  é um número inteiro, temos que

$$k \geq \left\lceil \frac{|E|}{\lfloor |V|/2 \rfloor} \right\rceil.$$

□

Por (10.1), sabemos que se exibirmos uma coloração das arestas de um grafo  $G$  com  $\Delta(G)$  cores, então  $\chi'(G) = \Delta(G)$ .

O seguinte resultado segue do Corolário 6.5 por indução no grau dos vértices.

### Corolário 10.2

Todo grafo bipartido  $k$ -regular admite uma decomposição em  $k$  emparelhamentos perfeitos.

Agora temos o que precisamos para provar o seguinte resultado que caracteriza o índice cromático de grafos bipartidos.

### Teorema 10.3: König, 1916

Para todo grafo bipartido  $G$  temos

$$\chi'(G) = \Delta(G).$$

*Demonstração.* Seja  $G = (X, Y; E)$  um grafo bipartido onde  $|X| \leq |Y|$ . Caso  $G$  seja

um grafo regular, então a validade do teorema segue do Corolário 10.2. Assim, podemos assumir que  $G$  não é regular.

A ideia da prova é mostrar que  $G$  é subgrafo de um grafo bipartido regular  $H$  e aplicar o Corolário 10.2. Seja  $G' = (X', Y; E)$  um grafo que contém  $G$  como subgrafo e temos que  $X \subseteq X'$ , onde  $|X'| = |Y|$ , i.e.,  $X'$  é um conjunto de vértices que contém  $X$  e possivelmente alguns vértices que não estão em  $G$ , adicionados a  $G'$  para fazer  $|X'| = |Y|$ .

Para todo  $v \in V(G')$ , defina  $f(v) = \Delta(G) - d_{G'}(v)$ , i.e.,  $f(v)$  é a quantidade de arestas incidentes a  $v$  que falta para que  $v$  tenha grau  $\Delta(G)$  em  $G'$ . Como  $G'$  é bipartido, sabemos que  $\sum_{v \in X'} d_{G'}(v) = \sum_{v \in Y} d_{G'}(v)$ . Portanto, temos que

$$\sum_{v \in X'} f(v) = \sum_{v \in Y} f(v).$$

Logo, é possível obter um grafo  $\Delta(G)$ -regular  $G''$  obtido de  $G'$  através da adição de arestas (provar isso é um bom exercício). Pelo Corolário 10.2, existe uma  $\Delta$ -coloração própria das arestas de  $G''$ . Claramente, essa coloração induz uma  $\Delta$ -coloração própria das arestas de  $G$ , de onde o resultado segue.  $\square$

O seguinte resultado, provado de forma construtiva, fornece um limitante superior de  $\Delta(G) + 1$  para  $\chi'(G)$ , onde  $G$  é um grafo qualquer.

Dada uma aresta-coloração de um grafo  $G$ , dizemos que uma cor  $i$  *incide* em um vértice  $v$  se nenhuma aresta incidente a  $v$  está colorida com a cor  $i$ .

**Teorema 10.4: Vizing, 1964**

Para todo grafo  $G$  temos

$$\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

*Demonstração.* Vamos provar o resultado por indução na quantidade de arestas do grafo. Seja  $G = (V, E)$  um grafo qualquer. Se  $|E| = 0$ , então o resultado segue imediatamente. Assim, assumamos  $m := |E| \geq 1$ .

Suponha que para todo grafo  $H = (V_H, E_H)$  com menos que  $m$  arestas temos que  $\chi'(H) \leq \Delta(H) + 1$ . Seja  $H = G - vw_1$  onde  $vw_1 \in E$ . Por hipótese de indução, existe uma  $(\Delta(H) + 1)$ -aresta-coloração própria  $\varphi$  de  $H$ . Logo, como  $\Delta(H) \leq \Delta(G)$ , a

coloração  $\varphi$  usa no máximo  $\Delta(G) + 1$  cores. Vamos colorir a aresta  $vw_1$  e modificar a coloração  $\varphi$  para obter uma  $\Delta(G) + 1$ -coloração de  $G$ . Como  $d_H(v)$  e  $d_H(w_1)$  são menores que  $\Delta(G) + 1$ , sabemos que

existem cores  $c_v$  e  $c_{w_1}$  que não incidem, respectivamente, em  $v$  e  $w_1$ .

No que segue, descrevemos sequências, respectivamente, de vértices  $(w_1, w_2, \dots, w_k)$  de  $G$  e de cores  $(c_1, c_2, \dots, c_k)$  que são maximais para 1 e 2 a seguir:

1. para todo  $1 \leq i \leq k$  temos que  $c_i$  não incide em  $w_i$ ;
2. para todo  $2 \leq i \leq k$ , a aresta  $vw_i$  está colorida com a cor  $c_{i-1}$ .

Pela maximalidade das sequências (e notando que  $k \leq \Delta(G)$ ), temos que as sequências não podem ser estendidas para sequências maiores por um dos dois motivos a seguir:

- A cor  $c_k$  não incide em  $v$ ;
- A cor  $c_k$  incide em  $v$  e em algum vértice de  $\{w_1, \dots, w_{k-1}\}$ .

Se a cor  $c_k$  não incide em  $v$ , então podemos mudar a cor das arestas  $vw_2, vw_3, \dots, vw_k$ , respectivamente, para  $c_2, c_3, \dots, c_k$  e colorir  $vw_1$  com a cor  $c_1$ , obtendo uma  $(\Delta(G) + 1)$ -aresta-coloração própria das arestas de  $G$ .

Assuma que não é possível estender  $(w_1, w_2, \dots, w_k)$  e  $(c_1, c_2, \dots, c_k)$  pelo fato de  $c_k$  ser a cor  $c_{j-1}$  de uma aresta  $vw_{j-1}$  para algum  $2 \leq j \leq k$ . Note que  $w_j \neq w_k$ , pois caso contrário teríamos que a cor  $c_k$  incide em  $w_k$ , uma contradição com a coloração dada.

Dê a cor  $c_1$  para  $vw_1$  e, para todo  $2 \leq i \leq j-1$ , mude a cor das arestas  $vw_i$  para  $c_i$ . Essa coloração não é própria pelo único motivo de  $vw_{j-1}$  e  $vw_j$  terem ambos a cor  $c_{j-1} = c_k$ . Mas então, o grafo  $G - vw_j$  está colorido propriamente com  $\Delta(G) + 1$  cores.

No que segue, considere o subgrafo  $G_{vk}$  de  $G - vw_j$  induzido pelas arestas com cores  $c_v$  e  $c_k$ . Como cada classe de cor é um emparelhamento, sabemos que  $G_{vk}$  é um grafo cujas componentes são caminhos, ciclos ou vértices isolados.

Como  $d_{G_{vk}}(v) = 1$  (pois a aresta  $vw_{j-1}$  tem cor  $c_k$  e a cor  $c_v$  não incide em  $v$ ) e temos que  $d_{G_{vk}}(w_j) \leq 1$  e  $d_{G_{vk}}(w_k) \leq 1$  (pois a cor  $c_k$  não incide em  $v_j$  nem em  $w_k$ ),

sabemos que  $v$ ,  $w_j$  e  $w_k$  não estão na mesma componente de  $G_{vk}$ . Assim, existem dois casos possíveis:

**Caso 1:**  $v$  e  $w_j$  estão em componentes distintas de  $G_{vk}$ .

Trocando as cores de todas as arestas da componente que contém  $v_j$  e dando a cor  $c_v$  para a aresta  $vw_j$  obtemos uma coloração própria das arestas de  $G$  com  $\Delta(G) + 1$  cores.

**Caso 2:**  $v$  e  $w_k$  estão em componentes distintas de  $G_{vk}$ .

Note que a aresta  $vw_k$  está colorida. Dê a cor  $c_j$  para  $vw_j$ , mude as cores de  $vw_{j+1}, vw_{j+2}, \dots, vw_{k-1}$ , respectivamente, para  $c_{j+1}, c_{j+2}, \dots, c_{k-1}$ , e deixe a aresta  $vw_k$  descolorida. As cores  $c_v$  e  $c_k$  não foram utilizadas nessa recoloração, de modo que com essa nova coloração o grafo  $G_{vk}$  não sofreu alteração. Assim, trocando as cores de todas as arestas da componente que contém  $w_k$  e dando a cor  $c_v$  para a aresta  $vw_k$  obtemos uma coloração própria das arestas de  $G$  com  $\Delta(G) + 1$  cores.

Provamos então que  $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ . □

O seguinte corolário segue diretamente do limitante inferior  $\chi'(G) \geq \Delta(G)$  e do Teorema 10.4.

### Corolário 10.5

Para todo grafo  $G$  temos

$$\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$





---

## Conjuntos independentes e cliques

Como já foi mencionado em capítulos anteriores, um *conjunto independente* ou *conjunto estável* de um grafo  $G$  é um conjunto de vértices  $X$  tal que o subgrafo de  $G$  induzido por  $X$  não contém nenhuma aresta. Um conjunto independente de um grafo  $G$  é *máximo* se tem a maior quantidade de vértices dentre todos os conjuntos independentes de  $G$ . Encontrar um maior conjunto independente de um grafo  $G$  é um problema difícil (na verdade, é um problema NP-difícil).

Denotamos por  $\alpha(G)$  a quantidade de vértices em um conjunto independente máximo de um grafo  $G$ . A  $\alpha(G)$  damos o nome de *número de independência* ou *índice de estabilidade* de  $G$ .

### Proposição 11.1

Para todo grafo  $G = (V, E)$ , temos

$$\alpha(G) \leq \frac{|E|}{\delta(G)}.$$

### Teorema 11.2

Para todo  $\varepsilon > 0$ , temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{G}(n, (2 + \varepsilon) \log_2 n)}{\mathcal{G}(n)} = 0.$$

Podemos interpretar o resultado acima como abaixo.

### Teorema 11.3

Seja  $\varepsilon > 0$ . Para “quase todo” grafo  $G$  com  $n$  vértices, temos que

$$\alpha(G) < (2 + \varepsilon) \log_2 n.$$

### Proposição 11.4

Para todo grafo  $G = (V, E)$ , temos

$$\alpha(G) \geq \frac{|V|}{\Delta(G) + 1}.$$

### Teorema 11.5

Para todo grafo  $G = (V, E)$ , temos

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{d(v) + 1}.$$

### Proposição 11.6

Para todo grafo  $G$ , temos

$$\omega(G) \leq \chi(G).$$

---

# *Planaridade*

## **Teorema 12.1: Fórmula de Euler**

Seja  $G = (V, E)$  um grafo planar conexo. Para toda imersão plana de  $G$  com  $f$  faces, temos

$$f = |E| - |V| + 2.$$

## **Teorema 12.2**

Seja  $G = (V, E)$  um grafo planar. Para toda imersão plana de  $G$  com  $f$  faces, temos

$$f = |E| - |V| + 1 + c(G).$$

## **Teorema 12.3**

Se  $G = (V, E)$  um grafo plano, então

$$\sum_{\text{faces } f} d(f) = 2|E|.$$

**Teorema 12.4**

Se  $G = (V, E)$  um grafo planar com  $|E| \geq 2$ , então

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

**Teorema 12.5**

Seja  $G = (V, E)$  um grafo planar com  $|E| \geq k/2$  que não contém ciclos com menos de  $k$  arestas. Então

$$|E| \leq \binom{k}{k-2} (|V| - 2).$$

**Teorema 12.6: Teorema de Kuratowski**

Um grafo  $G$  é planar se e somente se  $G$  não contém uma subdivisão de  $K_5$  ou de  $K_{3,3}$ .